

汎関数 Functional

2012 年 3 月 12 日

1 イントロ

経路積分では汎関数 (Functional, Distribution) に対する変分 (variation) や、汎関数微分 (Functional differentiation) を考える。

その定義をまとめておく。

ここでは、汎関数微分が存在するか等の存在可能性については一切触れていない。(具体的にもとまってしまうば存在する。)

2 関数 Function

定義域 (Domain) を D 、値域 (Range) を R とする関数 f とは写像 $f : D \rightarrow R$ であって全射であるもの。

R が環であるときは、 D から R への関数全体の集合 F も環となる。

環の定義

集合 A と写像 $+: A \times A \rightarrow A$ および、 $*: A \times A \rightarrow A$ が次を満たす時 $(A, +, *)$ は環 (Ring) であるという。

1. $+$ について可換群 (加群) をなす。つまり

1a. $+$ について閉じている。 $\forall a, b \in A, a + b \in A$

1b. 結合律を満たす。 $\forall a, b, c \in A, (a + b) + c = a + (b + c)$

1c. 零元を持つ。 $\exists 0 \in A, \forall a \in A, 0 + a = a$

1d. 逆元を持つ。 $\forall a \in A, \exists -a \in A, a + (-a) = 0$

1e. 可換である。 $\forall a, b \in A, a + b = b + a$

2. $*$ についてモノイドをなす。

2a. $*$ について閉じている。 $\forall a, b \in A, a * b \in A$

2b 結合律を満たす。 $\forall a, b, c \in A, (a * b) * c = a * (b * c)$

2c 単位元を持つ。 $\exists e \in A, \forall a \in A, e * a = a$

3. 分配法則を満たす。 $\forall a, b, c \in A, (a + b) * c = (a * c) + (b * c), a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$

R が環なら F への演算を

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f * g)(x) = f(x) * g(x)$$

等によって定義し、零元を $O(x) = 0 \in R$ 、単位元を $I(x) = e \in R$ 等とすれば環になる。
 特に、 R が体の時は、単位元の定数倍する写像によって、スカラー倍 $*$: $R \times F \rightarrow F$ を定義すれば、 F はベクトル空間になる。

要するに言いたいことは、関数はベクトルだってこと。(有限集合を定義域とする関数なら直感的に分かる。)

3 汎関数 Functional

汎関数とは、関数空間を定義域とする関数

例えば $R \rightarrow R$ の関数空間を F_R として、 F_R を定義域とし、 R を値域とする関数空間 F を考える。

$F : F_R \rightarrow R$

例:ある関数 $x : [0, t] \rightarrow R$ に対し、

$$S(x) = \int_0^t dt' \left| \frac{dx}{dt'} \right|$$

は汎関数の一例。

この例は、一次元を移動する点 $x(t)$ の時刻 $0 \sim t$ までの移動距離を与える。

汎関数は、引数の関数全体によって返り値が決まる。(グローバルな性質)

一方関数は、引数のある要素さえ定まれば返る値が定まる。(ローカルな性質)

(微分方程式が高次の微分を含んで非局所化していると、汎関数でないと解けない? 誰かこの辺りの性質教えて・・・w)

4 汎関数全微分 Differential

以下では、値域が C の部分集合であるような関数空間の汎関数について考える。ついでに、連続性とかは適当に仮定する。(この辺りは物理だとよくやるとごまかしたいになってるけど、相転移とかの特異点を扱うならちゃんと整備しないと駄目だと思う。けど、まだ知識が追いつかない。)

汎関数 F の (f の周りの) 全微分とは、線形汎関数 DF_f であって、

$$\forall g, DF_f[g] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} (F[f + \varepsilon g] - F[f])$$

を満たす汎関数。

5 汎関数偏微分 Partial Derivative

汎関数 $F[f]$ の $f(x)$ による偏微分とは、線形汎関数であって

$$\frac{\delta F}{\delta f(x)}[f] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} (F[f + \varepsilon \delta_x] - F[f])$$

をみたすもの。

ここで、 $\delta_x(x') = \delta(x - x')$ はディラックのデルタ超関数 (この時点ですでにいろいろ整合性が取れなくなってきたな・・・)

6 汎関数の Taylor 展開

$$F[f] = F[f_0] + \int dx_1 \frac{\delta F[f]}{\delta f(x_1)} \Big|_{f=f_0} f(x_1) + \frac{1}{2} \int dx_1 dx_2 \frac{\delta^2 F[f]}{\delta f(x_2) \delta f(x_1)} \Big|_{f=f_0} f(x_1) f(x_2) + \dots$$

ただし、

$$\frac{\delta^2 F[f]}{\delta f(x_2) \delta f(x_1)} = \lim_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} (F[f + \varepsilon_1 \delta_{x_1} + \varepsilon_2 \delta_{x_2}] - F[f + \varepsilon_1 \delta_{x_1}] - F[f + \varepsilon_2 \delta_{x_2}] + F[f])$$

汎関数 F は $f(x_1), f(x_2), \dots$ の無限個の変数を持つ関数と持つと分かりやすい。

そうするとチェーンルールとして

$$DF_f[g] = \int dx \frac{\delta F[f]}{\delta f(x)} g(x)$$

を持つことも見えてくる。

7 疑問点とか

つっこみどころがありすぎる。

汎関数とか超関数の厳密な数学的な枠組みは一度ちゃんと勉強しないとな・・・

要するに解析の知識が足りてないってことだろうけども (涙

汎関数のほうは基本的にはバナッハ空間で済む話だと思うんだけどな・・・キーワード:シュワルツ

超関数、佐藤超関数