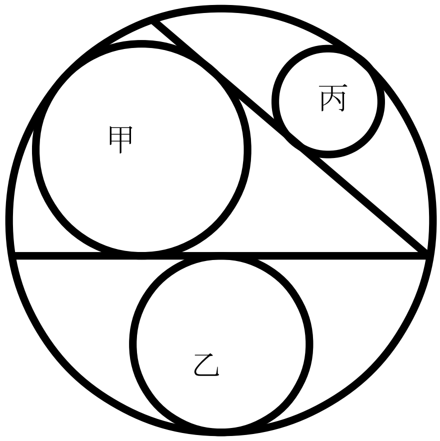
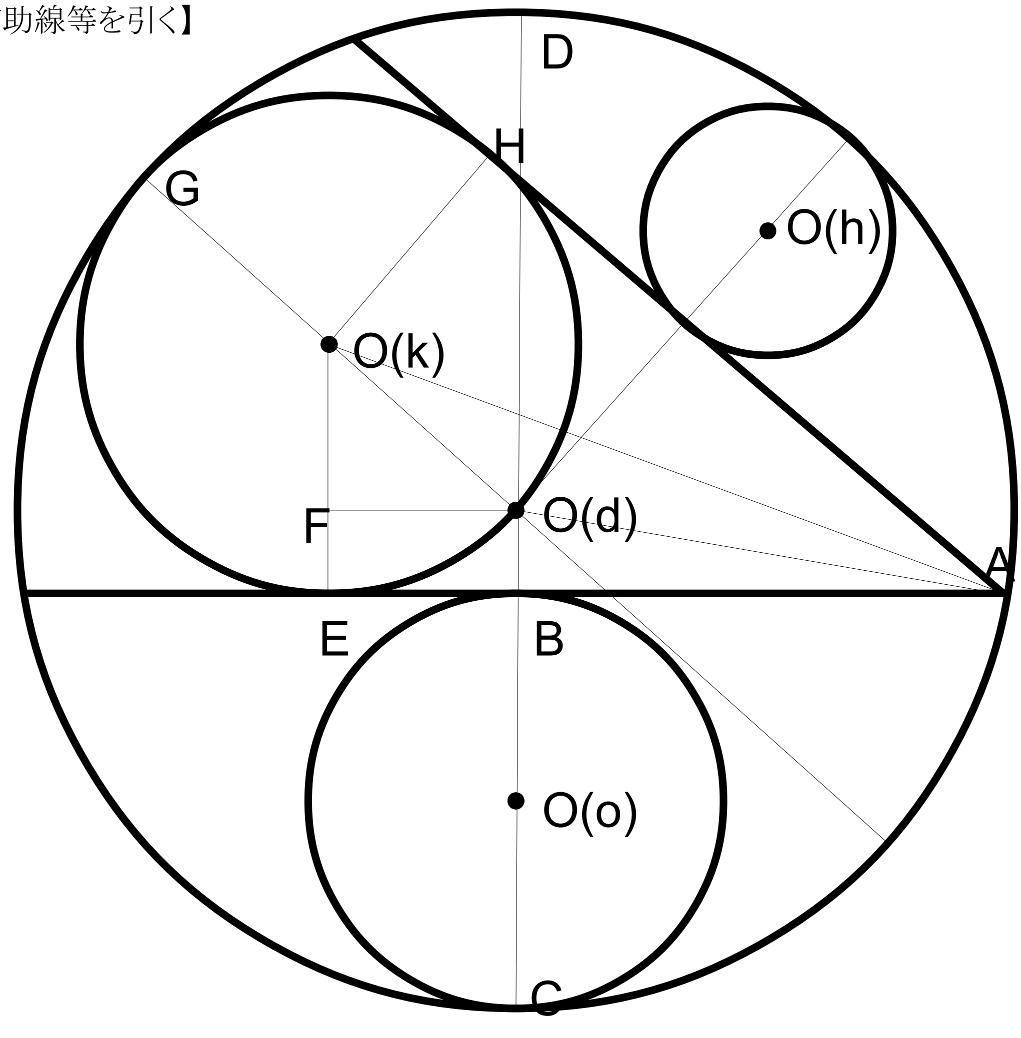
1201303	千葉県	金乗院	安政 6 年(1859)初秋	奉納算額の　問 3

http://www8.atwiki.jp/sangaku/

問	大圓内有如圖隔斜容甲乙丙三圓甲圓径一十二寸乙圓径十寸丙圓径六寸問大圓径	【図】
	図のように、大円の中に線で隔てて甲円、乙円、丙円が入っている。甲円の直径が 12 寸、乙円の直径が 10 寸、丙円の直径が 6 寸のとき、大円の直径を求めなさい。	
答	答　大圓径二十四寸也	
	答　大円の直径＝24 寸	
術	術曰甲乙丙和名天自之名地乙丙和乗甲径之以減地餘開平方加天二除之得大圓径合問	
	甲+乙+丙=天 とし、　天^2＝地　とする。 $\dfrac{\sqrt{地-(乙+丙)\times 甲\times 2}+天}{2}$ =大円径 となる。 (注) 「×2」の部分は、術文の「径」を「倍」とした。 術文のとおりに計算すると、24 寸とならない。	



【補助線等を引く】



【ABを式にする】

径矢弦の術により、
$AB^2=BC(CD-BC)$ となる。(CD=大円の直径、BC=乙円の直径)
大円、乙円の直径をそれぞれ大、乙とすると、
$\mathrm{AB}^2=乙(大-乙)$

【BEを式にする】

BE=O(d)F である。鉤股弦の術により、
$O(d)F^2=O(k)O(d)^2-O(k)F^2$ （図ではO(k)O(d)=甲円の半径であるが、未確定である。）
$=(O(d)G-O(k)G)^2-(O(k)E-EF)^2$ （O(d)G =大円の半径、O(k)G =O(k)E=甲円の半径）
$=(O(d)G-O(k)G)^2-(O(k)E-(O(d)C-BC))^2$ （O(d)C＝大円の半径、BC=乙円の直径）
大円、甲円、乙円の直径をそれぞれ大、甲、乙とすると、
$\mathrm{BE}^2=(\frac{大}{2}-\frac{甲}{2})^2-(\frac{甲}{2}-(\frac{大}{2}-乙))^2$
$=(\frac{大}{2}-\frac{甲}{2})^2-(\frac{甲}{2}-\frac{大}{2}+乙)^2$
$=[(\frac{大}{2})^2-2(\frac{大}{2})(\frac{甲}{2})+(\frac{甲}{2})^2]-[(\frac{甲}{2})^2-2(\frac{大}{2})(\frac{甲}{2})+(\frac{大}{2})^2+2(\frac{甲}{2})乙-2(\frac{大}{2})乙+乙^2]$
$\mathrm{BE}^2=大乙-甲乙-乙^2=乙(大-甲-乙)$ と整理できる。

【AE、AHを式にする】

AE=AB+BE であるので、大円、甲円、乙円の直径をそれぞれ大、甲、乙として、
$\mathrm{AE}=\sqrt{乙(大-乙)}+\sqrt{乙(大-甲-乙)}$

手順はAEと同様にして、大円、甲円、丙円の直径をそれぞれ大、甲、丙として、
$\mathrm{AH}=\sqrt{丙(大-丙)}+\sqrt{丙(大-甲-丙)}$

【2式を（力技で）合わせる】

甲円に対する2本の接線AE及びAHの長さは等しいので、
$\sqrt{乙(大-乙)}+\sqrt{乙(大-甲-乙)}=\sqrt{丙(大-丙)}+\sqrt{丙(大-甲-丙)}$ 移項し、
$\sqrt{乙(大-乙)}-\sqrt{丙(大-丙)}=\sqrt{丙(大-甲-丙)}-\sqrt{乙(大-甲-乙)}$ 両辺を2乗し、
$乙(大-乙)+丙(大-丙)-2\sqrt{乙(大-乙)}\sqrt{丙(大-丙)}=$
$丙(大-甲-丙)+乙(大-甲-乙)-2\sqrt{丙(大-甲-丙)}乙(大-甲-乙)$ 整理し、
$2\sqrt{乙丙(大-乙)(大-丙)}-甲(丙+乙)=2\sqrt{乙丙(大-甲-丙)(大-甲-乙)}$ 両辺を2乗し、
$4乙丙(大-乙)(大-丙)+甲^2(丙+乙)^2-4甲(丙+乙)\sqrt{乙丙(大-乙)(大-丙)}=$
$4乙丙(大-甲-丙)(大-甲-乙)$ 整理し、
$4甲(丙+乙)\sqrt{乙丙(大-乙)(大-丙)}=$
$8大甲乙丙-(4甲乙丙(乙+丙)-甲^2(乙-丙)^2)$ 両辺を2乗し、
$16甲^2(丙+乙)^2乙丙(大-乙)(大-丙)=$
$64大^2甲^2乙^2丙^2-16大甲乙丙(4甲乙丙(乙+丙)-甲^2(乙-丙)^2)$
$+(4甲乙丙(乙+丙)-甲^2(乙-丙)^2)^2$ 整理して、
$0=16乙丙(丙-乙)^2大^2-16大乙丙(丙-乙)^2(乙+丙)-16大乙丙甲(丙-乙)^2$

$+8甲乙丙(丙-乙)^2(丙+乙)-甲^2(丙-乙)^4$　大について整理すると、

$$0=16乙丙大^2-16乙丙(甲+乙+丙)大+8甲乙丙(丙+乙)-甲^2(丙-乙)^2$$

【方程式の解の公式を使う】

$$大=\frac{-(-16乙丙(甲+乙+丙))\pm\sqrt{(-16乙丙(甲+乙+丙))^2-4(16乙丙)(8甲乙丙(丙+乙)-甲^2(丙-乙)^2)}}{2(16乙丙)}$$

$$大=\frac{16乙丙(甲+乙+丙)\pm\sqrt{64乙丙(甲^2(乙+丙)^2)+4乙丙(乙+丙)^2}}{32乙丙}$$

$$大=\frac{甲+乙+丙}{2}\pm\frac{(乙+丙)\sqrt{乙丙(甲^2+4乙丙)}}{4乙丙}$$

【答文を検証する】

甲に12、乙に10、丙に6を代入すると、

$$大=\frac{12+10+6}{2}\pm\frac{(10+6)\sqrt{10\times 6(12^2+4\times 10\times 6)}}{4\times 10\times 6}=14\pm\frac{16\sqrt{23040}}{240}=14\pm\frac{32}{10}\sqrt{10}$$

よって、解は3.880711487･･･、24.11928851･･･の2通りが求められる。
しかし、大円の直径＞甲円の直径であるので、答えは24.11928851･･･寸となる。
答文では24寸となっているが、端数がない。

【術文を理解する】

術文は、次のとおりとなっている。

甲+乙+丙=天 とし、　$天^2=地$　とする。

$$\frac{\sqrt{地-(乙+丙)\times 甲\times 2}+天}{2}$$ =大円径 となる。

これを変形し、

$$大=\frac{\sqrt{(甲+乙+丙)^2-(乙+丙)\times 甲\times 2}+(甲+乙+丙)}{2}$$

$$大=\frac{甲+乙+丙}{2}+\frac{\sqrt{甲^2+乙^2+丙^2+2乙丙}}{2}$$ となる。

$$大=\frac{甲+乙+丙}{2}\pm\frac{(乙+丙)\sqrt{乙丙(甲^2+4乙丙)}}{4乙丙}$$ であるので、不一致である。

なお、術文に値を代入すると24寸となり、端数がない。
このことから、正解に至っていなかったと考えることができる。

額文の誤字についてであるが、甲を2倍しないとすると、23.2195444･･･寸となる。
そもそも、ここだけ「径」の字があり、「千葉県の算額」にも、付近に「ママ」とルビが振られていることから、算額自身の誤字と思われる。

【参考】
明治10年(1877)稲城市穴沢天神社【13016】ほかに類題が見られる。
【13017】