

1302101	東京都	神田明神	平成 18 年 10 月 吉日	奉納算額の 問 1
---------	-----	------	-----------------	-----------

<http://www8.atwiki.jp/sangaku/>

問	ここに七人のこどもがいます。彼らを空でない集合に分ける方法は全部で何通りになるかを求めなさい。	【図】
答	答曰 八百七十七通り	
術	術曰 二連数二十一、三連数三十五、四連数三十五、 五連数二十一、六連数七、七連数一、 二十五連数二十一、三十四数三十五、二二三連数 二百十、二四連数百五、三十三連数七十、 二二二連数百五、二三一連数二百十、皆断数一	

### 【ベル数】

ベル数は、 $n$  個のものを分割(もしくはグループ化)する方法の総数にあたる数である。

$$B_0=1 \quad B_1=1 \quad B_2=2 \quad B_3=5 \quad B_4=15 \quad B_5=52 \quad B_6=203$$

$$B_7=877 \quad B_8=4140 \quad B_9=21147 \quad B_{10}=115975$$

### 【ベル数の計算方法】

Step1 1  
1 x を初期状態とし、 $x = \text{左上} + \text{左}$  で求める。

Step2 1  
1 2  
y とし、 $y = \text{上段右端}$  で求める。

Step3 1  
1 2  
2 x とし、 $x = \text{左上} + \text{左}$  で求める。

Step4 1  
1 2  
2 3 x とし、Step1 と同様に求める。この数字がベル数(この場合は  $B_3=5$ )である。

以上を繰り返すことで、ベル数が求められる。(漸化式は [Wikipedia](#) に掲載されています。)

### 【算額への当てはめ】

本問は  $B_7$  を求めるため、 $B_7=877$  であり、答文と一致する。

【組み合わせを考える】

術文名称 (推測)	組み合わせ方法	計算式	計算結果
七連数	7	1	1
六連数	6+1	${}^7C_6 = 7!/6!(7-6)! = 5040/(720*1)$	7
二五連数	5+2	${}^7C_5 = 7!/5!(7-5)! = 5040/(120*2)$	21
五連数	5+1+1	${}^7C_5 = 7!/5!(7-5)! = 5040/(120*2)$	21
三四連数	4+3	${}^7C_4 = 7!/4!(7-4)! = 5040/(24*6)$	35
二四連数	4+2+1	${}^7C_4 \times {}_3C_2 = 7!/4!(7-4)! \times 3!/2!(3-2)!$ $= 5040/(24*6) \times 6/(2*1)$	105
四連数	4+1+1+1	${}^7C_4 = 7!/4!(7-4)! = 5040/(24*6)$	35
三三連数	3+3+1	${}^7C_3 \times {}_4C_3 \div 2 = 7!/3!(7-3)! \times 4!/3!(4-3)! \div 2$ $= 5040/(6*24) \times 24/(6*1) \div 2$	70
二二三連数	3+2+2	${}^7C_3 \times {}_4C_2 \div 2 = 7!/3!(7-3)! \times 4!/2!(4-2)! \div 2$ $= 5040/(6*24) \times 24/(2*2) \div 2$	105
二三連数	3+2+1+1	${}^7C_3 \times {}_4C_2 = 7!/3!(7-3)! \times 4!/2!(4-2)!$ $= 5040/(6*24) \times 24/(2*2)$	210
三連数	3+1+1+1+1+1	${}^7C_3 = 7!/3!(7-3)! = 5040/(6*24)$	35
二二二連数	2+2+2+1	${}^7C_2 \times {}_5C_2 \times {}_3C_2 \div 6 = 7!/2!(7-2)! \times 5!/2!(5-2)!$ $\times 3!/2!(3-2)! \div 6$ $= 5040/(2*120) \times 120/(2*6) \times 6/(2*1) \div 6$	105
二二連数	2+2+1+1+1	${}^7C_2 \times {}_5C_2 \div 2 = 7!/2!(7-2)! \times 5!/2!(5-2)! \div 2$ $= 5040/(2*120) \times 120/(2*6) \div 2$	105
二連数	2+1+1+1+1+1	${}^7C_2 = 7!/2!(7-2)! = 5040/(2*120)$	21
皆断数	1+1+1+1+1+1+1	1	1
		合計	877

ベル数ではあまりにもアレなので・・・。

組み合わせ方法は降順としたが、もれをなくせるのであれば何順でも差し支えない。

「術文名称」については、後に述べるが表記にブレがあるため、上表では「+」を使用せず、「連」を加えている。また数値は昇順となっている。

【術文を検討する】

術文は次のとおりとなっている(組み合わせ方法は推測である)。

術文名称	組み合わせ方法	計算結果
二連数	2+1+1+1+1+1	21
三連数	3+1+1+1+1	35
四連数	4+1+1+1	35
五連数	5+1+1	21
六連数	6+1	7
七連数	7	1
二十五連数	2+5	21
三十四数	3+4	35
二二三連数	2+2+3 または 2+2+1+1+1	210
二四連数	2+4+1	105
三十三連数	3+3+1	70
二二二連数	2+2+2+1	105
二三一連数	2+3+1+1	210
皆断数	1+1+1+1+1+1+1	1

二二三連数の計算結果が2倍になっており、また二二連数がない。  
 二二三連数と二二連数の計算結果(検算値)は等しいため、結果的に答えには影響しない。  
 よって、赤字部分を補足しておく。

しかし、二二連数が二二三連数に含まれるのであれば、二五連数を二連数に含める、等とすべきではないか。

なお、額文では「二四連数」「三十三連数」のように「+」の有無が混在していたり、「三十四数」のように「連」の字がない場合もあるなど、混乱を招く表記も見受けられる。

【ベル数の計算を表計算ソフトで再現する】 蛇足ともいう。

Step1 A1セルは定数「1」とする。

Step2 A2セルは演算式「=INDIRECT(ADDRESS(ROW(A2)-1,ROW(A2)-1))」とする。

Step3 B2セルは演算式「=IF(A1="", "", A1+A2)」とする。

Step4 A2:B2セルを、下方向にコピーする(必要なベル数 Bn の n 行まで)。

Step5 B2:Bnセルを、右方向にコピーする(必要なベル数 Bn の n 列まで)。

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	1							
2	1	2						
3	2	3	5					
4	5	7	10	15				
5	15	20	27	37	52			
6	52	67	87	114	151	203		
7	203	255	322	409	523	674	877	
8	877	1080	1335	1657	2066	2589	3263	
9	4140	5117	6067	7127	8086	11155	13744	