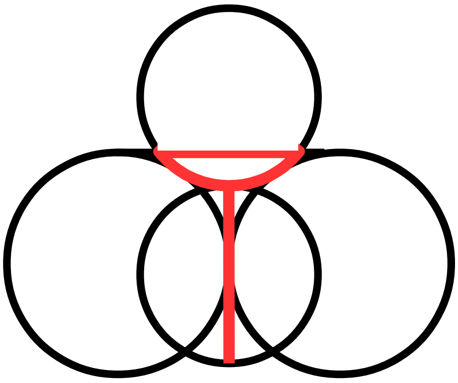
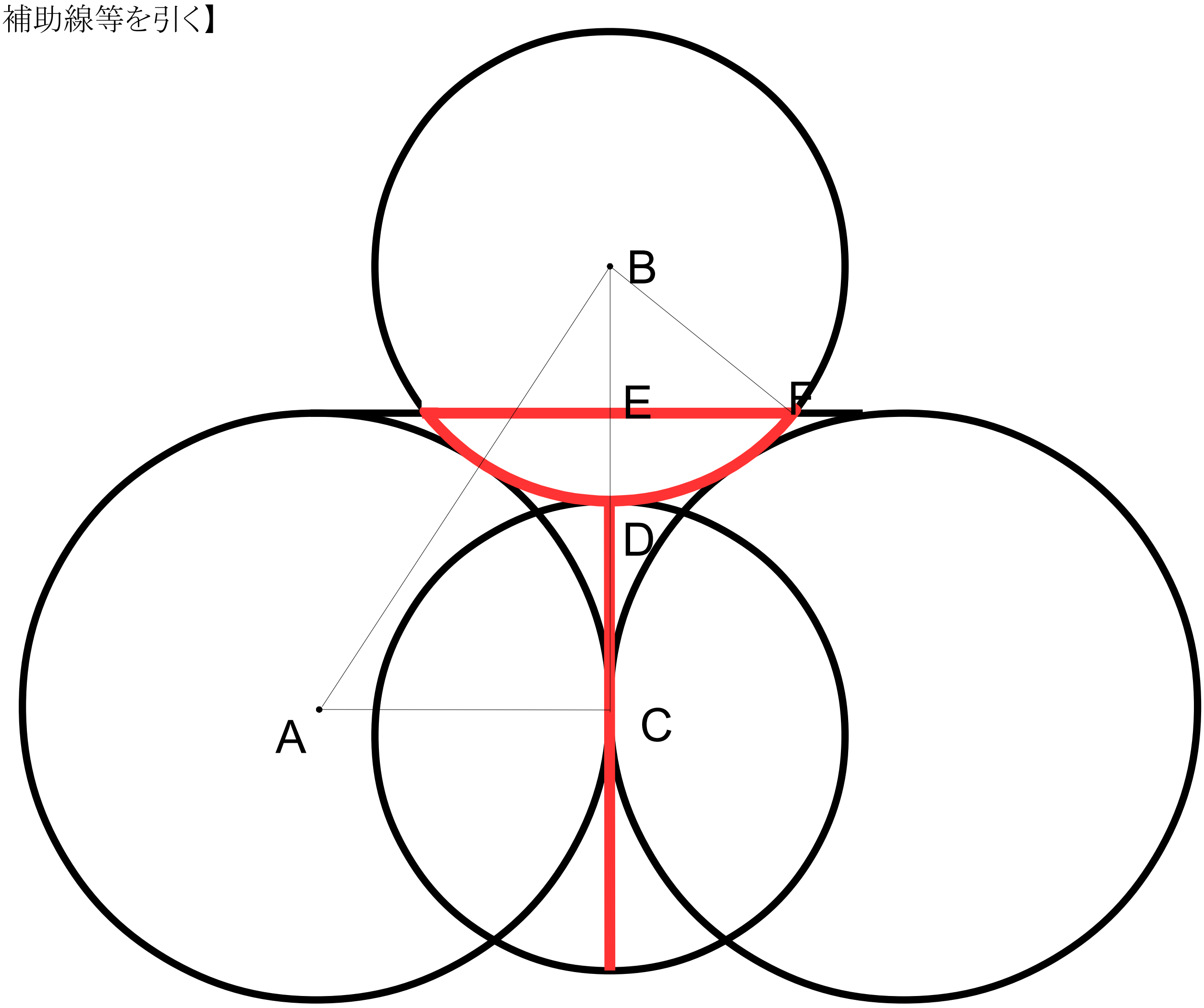
1300701	東京都	西窪稲荷神社	嘉永 5 年(1852)2 月初午	奉納算額の　問 1

http://www8.atwiki.jp/sangaku/

問	有今如圖甲圓徑一丈宛而併而置上ヌ乙圓徑八尺載而闕之弦弧弓随箭訓下之丙圓徑各曰問	【図】
	図のように、直径1丈(=10 尺)の甲円が2つ外接しており、その上に直径 8 尺の乙円が載っている。甲円の共通接線と乙円の交点とでできる弦と弧を求めなさい。また、甲円同士の接点を中心とし、乙円に接する丙円があるとき、その直径を求めなさい。	
答	答曰 弦六尺二寸七分 弧率七尺二寸五分余 丙徑六尺九寸六分余	
	答　弦 6.27 尺　弧 7.25･･･尺　丙円の直径 6.96･･･尺	
術		
	(術文なし)	

【補助線等を引く】



【弦を求める】(径矢弦の術は使わないで求めてみる。)

△ABC は直角三角形であるので、

$$BC^2 = AB^2 - AC^2 = \left(\frac{甲}{2}+\frac{乙}{2}\right)^2 - \left(\frac{甲}{2}\right)^2 = \frac{乙^2+2甲乙}{4}$$ である。

これより、 $BC = \dfrac{\sqrt{乙^2+2甲乙}}{2}$ となる。

△BEF は直角三角形であるので、

$EF^2 = BF^2 - BE^2$ である。

BF は乙円の半径である。

BE=BC-CE であり、CE は甲円の半径である。よって、

$$EF^2 = \left(\frac{乙}{2}\right)^2 - \left(BC - \frac{甲}{2}\right)^2 = \left(\frac{乙}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{乙^2+2甲乙}-甲}{2}\right)^2$$ 整理して

$$EF^2 = \frac{2甲\sqrt{乙^2+2甲乙} - 甲(2乙+甲)}{4}$$ よって

求める弦 $= 2\sqrt{EF^2} = \sqrt{2甲\sqrt{乙^2+2甲乙} - 甲(2乙+甲)}$ となる。

【弧を求める】

弧をL、半径をr、弦をd、中心角をθ(ラジアン)とした場合、

$$\theta = \frac{L}{r}$$ である。また、

$$\sin(\theta) = \frac{\frac{d}{2}}{r} = \frac{d}{2r}$$ であるので、

$$\theta = \arcsin\left(\frac{d}{2r}\right)$$ となる。

2式より、

$$L = 2r \times \arcsin\left(\frac{d}{2r}\right)$$ である。よって、

$$弧 = 乙 \times \arcsin\left(\frac{弦}{乙}\right)$$ で求められる。

【丙円の直径を求める】

CD=BC-BD であるので、 $CD = \dfrac{\sqrt{乙^2+2甲乙}-乙}{2}$ となる。

CD は丙円の半径であるので、求める丙円の直径 $= 2 \times CD = \sqrt{乙^2+2甲乙} - 乙$ である。

【答文を検証する】

甲に 10、乙に 8 を代入すると、

$$弦 = \sqrt{2甲\sqrt{乙^2+2甲乙} - 甲(2乙+甲)} = \sqrt{20\sqrt{224}-260} = 2\sqrt{20\sqrt{14}-65} = 6.27157005\cdots 尺$$

$$弧 = 乙 \times \arcsin\left(\frac{弦}{乙}\right) = 8 \times \arcsin\left(\frac{2\sqrt{(20\sqrt{14}-65)}}{8}\right) = 7.20797588\cdots 尺$$

$$丙円の直径 = \sqrt{乙^2+2甲乙} - 乙 = 10\sqrt{14} - 8 = 6.96662954\cdots 尺$$

となり、弦は端数がなく、弧は不一致である。

【弧について考察する】

　中心角を 130°として計算すると、弧は 7.25046229･･･となる。
　なお、現代解では中心角は 103.246649･･･°となる。

　弧矢弦の術（これは誤っている術である（特定の条件化でのみ成立する。））では、
　　弧^2＝弦^2＋6 矢^2　となっている。
　弦を 6.27、矢を 1.50 として計算すると、弧は 7.267248447･･･となるので、この術を使用した可能性もある。