

1 はじめに

この文書は、電磁気学の理解の助けにするために作られたものである。

構成としては、まず第一部でいくつかの必要な数学的定理を示し、第二部で電磁気学の基礎方程式であるマクスウェル方程式を説明し、その後様々な条件の下でマクスウェル方程式の解を考えてゆく。

具体的には、第三部では静電場を、第四部では静磁場を扱い、第五部でポテンシャルについて触れ、静電磁場の理論とする。

さらに、第六部では電磁誘導を、第七部では変位電流について触れ、第八部で電磁波の存在・波動方程式を導き、この三部までで動電磁場の理論とする。

その後、力学との関係として第九部でローレンツ力、第十部でエネルギーについて触れ、全十部をもって電磁気学の基礎理論を完成する。

これ以降の内容（磁性体、コイル、コンデンサー、回路など）は、別紙電磁気学応用にまとめる予定なので、参照されたし。

また、基本的に人間は電場・磁場を「見」たり、「聞い」たりできないので、直感的理解はしにくい、場の理論なのでそういう場が存在すると受け入れるのがもっとも良い理解のしかたである。（もちろん、実験により場の存在を確かめることは常に必要だが。）

また、マクスウェル方程式は覚えるしかない。力学で運動方程式を導く方法はないことと同様である。ただし、マクスウェル方程式は基本的に積分しないと直感的意味のない方程式なので、積分形を念頭において方程式の意味を考えてほしい。このことから第二部まではあえて方程式や定義を列挙しているのみであり、第三部以降を読むことでマクスウェル方程式を直感的に理解していくようになっている。また、常に意識してほしい発想として、場の話なので、場を足し合わせる（＝積分する）場合にはその積分の仕方としては、面積分（面に垂直な成分の和）、線積分（線と平行な成分の和）、体積積分（単純なベクトルの和）の三種類が常に存在しているということを念頭に置き、どの和を取ることで意味のある法則が導けるかを考えて積分していることに注意してほしい。

なお、同時並行で演習をこなすことを強くお勧めする。

2 第一部 概念

この第一部では、まず電磁気学の概念を述べた後、必要なベクトル解析の定理を大まかに示す。決して数学的に厳密に示しはしないことに注意。詳しくはベクトル解析の参考書を見ること。

電磁気学の目的は、物体に力を及ぼし得る場、特に電場と磁場についての振る舞いを知ることにある。すなわち、電場 E と磁場 H について、

$$E = E(x, y, z, t)$$

$$H = H(x, y, z, t)$$

と二つの場を位置と時間の関数として表現できれば、電磁気学の問題が解けたことになる。そこで、この二つの表式を求めるために、基礎方程式としてマクスウェル方程式という方程式群を用いる。

また、これらの方程式の解を求め、その意味を理解し、現実の問題に対応させることも電磁気学の大きな目標の一つである。

また、ここでは電荷、電流の意味は既知とする。(力学から定義されるものなため)

定理・定義

演算子 ∇ を、

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

と定義する。これにより $A = (a, b, c)$ について

$$\nabla A = \left(\frac{\partial a}{\partial x}, \frac{\partial b}{\partial y}, \frac{\partial c}{\partial z} \right) \quad (\text{A の傾きと呼ぶ})$$

$$\nabla \cdot A = \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z} \quad (\text{A の発散と呼ぶ})$$

$$\nabla \times A = \left(\frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial z}, \frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial c}{\partial x}, \frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} \right) \quad (\text{A の回転と呼ぶ})$$

$$\nabla \cdot \nabla = \Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \quad (\text{ラプラシアンと呼ぶ。本紙では } \Delta \text{ と紛らわしいので使用しない})$$

である。

ベクトル算法

$$c \cdot (a \times b) = b \cdot (c \times a) = a \cdot (b \times c) \quad (\text{スカラー三重積})$$

$$a \times (b \times c) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c \quad (\text{ベクトル三重積})$$

ナブラベクトル算法 (ほとんどがベクトル算法から導かれる。)

$$\nabla(AB) = (\nabla A)B + A(\nabla B) \quad (\text{積の微分})$$

$$\nabla \times (\nabla A) = 0$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times A) = 0$$

$$\nabla \times (\nabla \times A) = \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla^2 A$$

$$\nabla \cdot (A \times B) = B \cdot (\nabla \times A) - A \cdot (\nabla \times B)$$

ガウスの定理

$$\int_S A \cdot dS = \int_V \nabla \cdot A dV$$

言葉で言うと、A の発散をある空間についてすべて足し合わせたものは、その空間の境界面に垂直な A の成分を足し合わせたものに等しい。

ストークスの定理

$$\int \nabla \times A \cdot dS = \int_C A \cdot ds$$

言葉で言うと、ある閉曲線 C についての A の経路積分は、その閉曲線を境界とする任意の面に垂直に A の回転を足し合わせたものに等しい。

3 第二部 マクスウェル方程式

さて、いよいよ電磁気学の基礎理論であるマクスウェル方程式を説明する。

まず、電荷 q をもつ粒子が r の位置に存在するとき、力 F を受けるとき、

$$F(r, q) = E(r)q$$

により電場 E を定義する。

さらに、電荷分布によらず、任意の閉曲面 S について、

$$\int_S E \cdot dS = \frac{Q}{\varepsilon} = \int_V \frac{\rho}{\varepsilon} dV \quad (\rho \text{ は電荷密度, } Q \text{ は閉曲面 } S \text{ 内の全電荷の総和})$$

が成立する。これをガウスの法則という。

また、ガウスの定理より、上の式を変形して

$$\int_V \nabla \cdot E dV = \int_V \frac{\rho}{\varepsilon} dV$$

であり、さらに積分範囲が一致しているので、

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\varepsilon} \quad (\text{ガウスの法則微分形})$$

となる。当然この式は積分することで始めて直感的意義を持つ。

また、さらに、電場の回転の満たすべき定理として

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (\text{電磁誘導の法則})$$

がある。

ちなみに、マクスウェル方程式を原理として採用する場合、上記の電場の定義、次の磁場の定義は特に必要ではない。(マクスウェル方程式は場の存在定理と考えることもできるため)

ここから、磁場を定義し、磁場の発散に関するマクスウェル方程式を紹介する。

そこで、磁場を定義するための式として、任意の電流の周りを囲んでいる閉曲線 l について

$$\int_l H \cdot dl = I$$

により磁場 H を定義する。

さらに、定数 μ を用いて、磁束密度 B を

$$B = \mu H$$

と定義し、磁束密度が満たすべきマクスウェル方程式を

$$\nabla \cdot B = 0$$

$$\nabla \times B = \mu(j + \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t})$$

とする。(j はその点における電流(面)密度、 $\int_S j dS = I$)

まとめると、

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot B = 0$$

$$\nabla \times B = \mu(j + \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t})$$

であり、これらの方程式について考えるのが電磁気学である。(もちろん、各式ともに積分して意味を持つものであり、現時点ではただの方程式として捕らえればよい)

4 第三部 静電場

さて、まずは静電場の発散

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

について考える。ガウスの法則により体積積分して

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{E} dV = \int_V \frac{\rho}{\varepsilon} dV$$

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\varepsilon} \quad (Q \text{ は体積 } V \text{ の中の全電荷})$$

これは言葉で言うと、「任意の閉曲面 S について、 S に垂直な電場の和は、その S で囲まれた空間の中にある全電荷に等しい」ということである。

さて、ここから有用な電場に関する結論として、点電荷、直線電荷、平面電荷による電場を求めてみる。。

まず、一つの点電荷 (電気量 q) が作る電場を求めてみる。

閉曲面 S としては点電荷を中心とする半径 r の球形の空間を考え、対称性からこの球面上で電場が一定であるとするると、

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\varepsilon}$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon}$$

ここから

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{q}{r^2} \quad (\text{クーロンの法則})$$

が導かれる。

次に、直線電荷について考えると、

S として直線電荷が円の中心を通る長さ l , 半径 r の円柱を考える。対称性から円柱の側面では電場の強さが一定で、上面・下面では 0、直線電荷の線密度は $\rho(C/m)$

とすると

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \frac{\rho}{\varepsilon} dV$$

$$E \cdot l \cdot 2\pi r = \frac{1}{\varepsilon} \rho l$$

$$E = \frac{\rho}{2\pi\varepsilon r}$$

となる。

さらに、面電荷 (電流の面密度 σ) を考える。今回は、面で二等分される一辺 l の立方体を考え、面と平行な部分でのみ一定の電荷が得られるとすると

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \frac{\sigma}{\varepsilon} dV$$

$$2l^2 \cdot E = \frac{1}{\varepsilon} \sigma l^2$$

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon}$$

このように、対称性とうまい S の選び方により大体の問題が解かれる。

次に回転について考えると

静電場とは、時間によって電場・磁場が変化しない場合を考えているということである。

よって、今の仮定は

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\partial E}{\partial t} = 0 \text{ なので、静電場の回転の方程式は}$$

$$\nabla \times E = 0$$

ストークスの定理より

$$\int_C E \cdot dl = 0$$

つまり、電場を閉曲線に沿って足し合わせると 0 になる。

5 第四部 静磁場

$$\nabla \cdot B = 0$$

について考える。が、右辺が 0 なのでガウスの法則を使って積分すると

$$\int_S B \cdot dS = 0$$

であり、これは、 B を矢印として描くと、 S で囲まれた空間 V に入った矢印は必ず V から出ていき、 V から出る矢印は必ずその前に V へと入っていることを意味している。つまり、磁束密度 B は、ある点から突然生まれたり（発散）せず、常につながって循環（回転）している。

磁場の発散については、この事実を理解できればよい。（電場で言えば、電荷がないのだから考える余地はあまりない）

さて、静電場の回転は存在しなかったが、静磁場に関しては、マクスウェル方程式に

$$\frac{\partial E}{\partial t} = 0 \text{ を代入して}$$

$$\nabla \times B = \mu j$$

$$j = \frac{\partial I}{\partial S}$$

ここで、 j はベクトルなことに注意。さて、この方程式をストークスの定理で積分して

$$\int_S \nabla \times B \cdot dS = \int_S \mu j \cdot dS$$

$$\int_C B \cdot dl = \mu I \quad (\text{アンペールの法則})$$

つまり、「磁場を平曲線に沿って曲線との並行成分を足し合わせると、閉曲線を境界とする曲面を通る電流に定数をかけたものになる」ということになる。

この式からもわかるように、基本的には静磁場とは電流が作り出す、というのが電磁気学の発想である。後に示すが、磁石によって作られる磁場も電流が作り出したとみなすことができる。

さて、ここから有用な直線電流が作る磁場を求め、その後電場の法則でのクーロンの法則に対応するビオ・サヴァールの法則を示す。

直線電流については、C を直線電流に垂直な平面状の半径 r の円周にとると

$$\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu I$$

$$\mathbf{B} \cdot 2\pi r = \mu I$$

$$\mathbf{B} = \mu \frac{I}{2\pi r}$$

ここから、微小なベクトル $d\mathbf{r}'$ の直線電流 I により作られる磁場を求めてみる。

直線電流の位置を r' 磁場を観測する位置を r とする。

ビオ・サヴァールの法則

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{I d\mathbf{r}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

とあらわされる。(証明は演習問題にする。)

6 第五部 ポテンシャル

ここからはしばらくポテンシャルについて解説する。

まず、スカラーポテンシャル $\phi(x, y, z)$ を

$$\nabla\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z} \right) = -\mathbf{E}$$

となるような関数と定義する。(この関数の存在の証明は省略) このとき、この式をマクスウェル方程式

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

へ代入して(第二式はスカラーポテンシャルの定義とベクトル算法から自明)

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

となり、二つの方程式はこの一つの方程式に帰着される。この方程式をポワソン方程式という。

つまり、静電場の問題に関してはマクスウェル方程式の二つの式を解く代わりに、このポワソン方程式を解くことでスカラーポテンシャルを求め、それを微分することで電場を求めることができる。

ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ を、

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$$

により定義する。これをマクスウェル方程式

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{j}$$

へ代入すると(第一式はベクトルポテンシャルの定義とベクトル算法から自明)

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = -\mu \mathbf{j}$$

ベクトル算法より

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla^2 \mathbf{A} - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\mu \mathbf{j}$$

ここで、 $\nabla \cdot \mathbf{A}$ について重要な A の任意性について説明する。 A の定義は

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$$

だが、

$$\nabla \times (\mathbf{A} + \nabla \psi) = \mathbf{B}$$

なので、 A には任意の関数 $\nabla \psi$ を自由に足すことができるという自由度を持つ (ゲージ対称性という)。そこで、

$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla \psi$ と置き換えると、 $\nabla \cdot \mathbf{A} \rightarrow \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla^2 \psi$ だが、 ψ は任意のかんすうなので、

$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ となるように選ぶことができる。

このことを利用すると

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{j}$$

となり、ポワソン方程式に帰着する。

つまり、静電磁場の問題はすべて、ポワソン方程式の解を求めるという単一の問題に帰結することができる。(練習問題参照)

7 第六部 電磁誘導

さて、いよいよ静的でない電磁場について見ていくことにする。まず最初は、

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

である。これをストークスの定理で面積分して

$$\begin{aligned} \int_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} &= -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \\ \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} &= -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (\text{電磁誘導}) \end{aligned}$$

つまり、閉曲線 C で囲まれた面 S について、 C に沿って電場を足し合わせたものは、面 S に垂直な磁場を足し合わせたものの時間微分に等しい。ところで、閉曲線 C 以外の場所に電場は生じていないとすると、経路積分は空間積分に等しく、

$$\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_V \mathbf{E} \cdot d\mathbf{V} = \phi \quad (\text{電位})$$

である。そこで、 $\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \Phi$ として、この Φ を磁束と定義する。これにより、「銅線には、その銅線により囲まれる面を貫く磁束の時間変化率と同じ大きさの起電力が働く」というのが、この方程式の簡単な理解のしかたである。

(例)

半径 a の円形の銅線の中で、磁場 B が $B = bt$ と変化している。このとき、銅線内に生じる電場を求めよ。

$$\int_C E \cdot ds = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S B dS$$

より

$$E \cdot 2\pi a = -b \cdot \pi a^2$$

$$E = \frac{ab}{2}$$

8 第七部 変位電流

マクスウェル方程式

$$\nabla \times B = \mu \left(j + \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} \right)$$

について考える。そもそも電磁気学において、電流とは磁場の発生源のことを指す。そこで、上の式を見ると、 j は通常の電流を表しているが、 $\varepsilon \frac{\partial E}{\partial t}$ については通常の電流とは違い、電場の変化率にすぎない。しかし、磁場の発生源となっていることは確かなので、これを一種の電流とみなし、変位電流と呼ぶ。(例は練習問題参照)

また、この式は自動的に電荷保存則を含む。

(証明)

ベクトル算法より

$$\nabla \cdot \nabla \times B = 0$$

よって

$$\nabla \cdot \mu \left(j + \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} \right) = 0$$

ここで、マクスウェル方程式より $\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\varepsilon}$ なので、

$$\nabla \cdot j + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

(通常の) 電流とは電荷の時間変化率なので、この式の意味は、ある空間から単位時間に出て行く電荷の量は、その空間から単位時間の間に減る電荷の量に等しいという当然のことを言っている。この方程式を連続方程式と呼び、一般に保存法則が成り立つことを数式で表現すると連続方程式が現れる。

9 第八部 電磁波

さて、これまでの七部で、すべてのマクスウェル方程式についての解説が終わった。しかし、いままでは常に電荷と通常電流の存在の下での解以外は求めてこなかった。ここで、 $\rho = 0$ 、 $j = 0$ の条件の下での解を求めてみる。しかしその前に、動的な電磁場に関して、ポテンシャルを再定義しておく。

ポテンシャルの条件としては、静的な場合と同様にマクスウェル方程式のうち

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

が自動的に満たされるものを選ぶ。すると、

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$$

$$-\nabla\phi = \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

とすればよいことがわかるだろう。(変位電流の電位をつけたしただけ)

ただし、ゲージ対称性を用いて

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

となるように $\mathbf{A}$ を定義する。

このとき、残りのマクスウェル方程式は

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \left(\mathbf{j} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$$

へ先ほどのポテンシャルを代入すると

$$\nabla^2 \phi + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) - \mu \varepsilon \left(-\nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \right) = -\nabla^2 \mathbf{A} + \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \mu \varepsilon \left(-\nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \right) = \mu \mathbf{j}$$

ここで

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

を用いると

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{A} = \mu \mathbf{j}$$

$$\text{ただし、} c = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}}$$

この二つの方程式は波動方程式になっており、たとえ $\rho = 0, \mathbf{j} = 0$ でも解を持つ。

(例えば、 $\phi = \phi_0 \sin(x - ct)$ 等。この方程式の解については振動・波動論参照)

また、この波動方程式の解を電磁波と呼ぶ。

10 第九部 ローレンツ力

さて、この第九部からは力学との関係について議論してゆく。そこで、まず電磁気学により計算された場が粒子に与える力を(実験的に)決める。この力は、速度 $\mathbf{v}$ の電荷 q にたいして

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

の大きさの力を与え、ローレンツ力と呼ばれる。基本的に力学と電磁気学の関係はこの式ですべてだが、有用な例や、同じ現象が力学的・電磁気学的にどのように違って解釈されるかを演習問題を通して学んでほしい。

11 第十部 エネルギー

さて、ローレンツ力により力が定義できたため、力学的に仕事を決定できる。まず、 $\nabla U = \mathbf{F}$ なので、 $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ について

$$\nabla U = q\mathbf{E}$$

$$U = \int_V q\mathbf{E}dV = q\phi$$

である。ただし、この U というのは、系全体のエネルギーの増加量であり、電荷 q のエネルギーの増加はこの半分であることに注意。事実、 $E = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{r^2}$ とした場合、電荷を持ってくるための仕事は

$$U = \int_{\infty}^r \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q^2}{r'^2} dr' = -\frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q^2}{r}$$

だが、元からある電場を作ってる電荷も、動かされた電荷による電場により動かされた電荷と同じだけのエネルギーを得ているので、実際に粒子一個あたりで増えたエネルギーは

$$U = \frac{1}{2}q\phi$$

である。

ところで、このことから、電荷が連続分布する場合、

$$U = \int_V \frac{1}{2}\rho\phi dV$$

となるが、(あくまでおおよそ。厳密には力学から計算する。)

$$\begin{aligned} \int_V \frac{1}{2}\rho\phi dV &= \int_V \frac{1}{2}\epsilon \frac{\rho}{\epsilon} \phi dV = \int_V \frac{1}{2}\epsilon \nabla \cdot \mathbf{E} \cdot \phi dV \\ &= \int_V \frac{1}{2}\epsilon \left(\frac{\partial E_x}{\partial x}, \frac{\partial E_y}{\partial y}, \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) \phi dV = \left[\frac{1}{2}\epsilon (E_x, E_y, E_z) \phi \right]_{-\infty}^{\infty} + \int_V \frac{1}{2\epsilon} \mathbf{E}^2 dV = \int_V \frac{1}{2\epsilon} \mathbf{E}^2 dV \end{aligned}$$

であり、電場 E が存在するとき、その点のエネルギー密度が $\nabla \cdot U = \frac{E^2}{2\epsilon}$ である
とわかった。

さて、この式は、最初は電荷に付随していると思っていたエネルギーが、実は電場という抽象的な量に付随するものと考えられることを示している。また、この電場に対するエネルギーはもはや仕事からも切り離して考えることができる。

そこで、電磁気学では $\nabla \cdot U = \frac{E^2}{2\epsilon}$ を電場のエネルギーの定義として用いる(ちな

みに、この第十部の議論は厳密には力学の範囲であろう)。このとき、 $\frac{1}{2}$ という因子は外部電場がないことを仮定していることに注意せよ。

さて、次に磁場のエネルギーを考えてみる。電場に関しては電場の発生源であった電荷を増やす場合の仕事を考え、そこから定義したので、今回は磁場の発生源である電流を増加させる場合の仕事を考えてみる。

さて、まずローレンツ力の式より仕事は $W = \Delta r \cdot (E + v \times B)$ なのだが、そもそも v と Δr の向きは常に同じである。つまり、磁場のローレンツ力により粒子に仕事がかかることはない。しかし、粒子の移動により磁場が変化し、その誘導電

場逆らって粒子は移動するため、このときに必要な仕事が磁場のエネルギーである。よって、関係あるマクスウェル方程式は

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \left(\mathbf{j} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$$

である。このような $\mathbf{E}$ について、電流とは単位時間当たりに通る電荷の量なので

$$\frac{\partial W}{\partial t} = - \int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} dV = - \int_V \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{B} - \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{E} dV = \int_V \frac{1}{2\mu} \frac{\partial}{\partial t} B^2 dV + \int_V \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial}{\partial t} E^2 dV$$

(途中の計算は演習問題参照) よって

$$W = \int_V \frac{1}{2\mu} B^2 dV + \int_V \int_0^\infty \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial}{\partial t} E^2 dt dV$$

$$\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t} E^2 dt = E^2(\infty) - E^2(0) = 0 \quad (\text{電流を } 0 \text{ から } j \text{ に単純に増やすため。最初も最後も磁場の変化率は } 0)$$

なので、

$$U = \int_V \frac{1}{2\mu} B^2 dV$$

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = \frac{1}{2\mu} B^2$$

となり、これを磁場の定義として採用する。

これにより、電磁気学現象のすべてのエネルギーが定義できた。

さて、ここまでの議論からこの

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = \frac{1}{2\varepsilon} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu} \mathbf{B}^2$$

という定義が、電荷・電流の存在するについて成立していることは自明である。(第一項が静電場の影響、第二項は動電場の影響、磁場による仕事は0) しかし、電磁波のような電荷や電流の存在しない場合にも成立しているかは自明でないので、そのことについて最後にふれておく。

まず、磁場による仕事は0であることは前述のとおりである。また、ある領域 V での電場による仕事率は

$$\frac{\partial}{\partial t} W_E = \int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} dV$$

であった。(この場合の $\mathbf{E}$ は誘導電場、静電場の両方を含む) さらに、電磁波のエネルギーの流れ(つまり、単位面積から単位時間に出て行くエネルギー量)をあらわすベクトル $\mathbf{J}$ が存在すると仮定すると、閉曲面 S から放射される電磁波によるエネルギーは

$$\frac{\partial}{\partial t} W_J = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

であり、この二つのエネルギーの変化率の和が電磁場のエネルギーの変化率の和に等しいはずなので

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{1}{2\varepsilon} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu} \mathbf{B}^2 \right) dV = - \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} - \int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} dV$$

となるはずである。

ここで、

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2\varepsilon} \mathbf{E}^2 \right) = \frac{1}{\mu} \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) - \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2\mu} \mathbf{B}^2 \right) = -\frac{1}{\mu} \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E})$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$$

より、

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{1}{2\varepsilon} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu} \mathbf{B}^2 \right) dV = - \int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} dV - \int_S \frac{1}{\mu} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S}$$

なので (演習問題参照)、

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\mu} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$$

と定義すればエネルギー保存則が成立する。

このとき、 $\mathbf{J}$ をポインティングベクトルと呼ぶ。

12 演習問題 第一部

1.1

電磁気学の基礎概念をよく確認せよ。

13 演習問題 第二部

2.1

マクスウェル方程式を書き下せ。(4 つ)

14 演習問題 第三部

3.1

z 軸上の直線電荷 (電荷線密度 ρ) による、 $(x, y, 0)$ での電場をクーロンの法則から導け。

ただし積分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{z^2 + a^2}} dz = \frac{2}{a}$$

を用いてよい。

3.2

xy 平面状の平面電荷 (電荷面密度 σ) による、 $(0, 0, z)$ での電場をクーロンの法則から導け。

ただし積分公式

$$\int_0^\infty \frac{r}{\sqrt{r^2 + a^2}} dr = \frac{1}{a}$$

を用いてよい。

3.3

電荷密度 σ の二つの平面電荷が xy 平面と平行に $z = \pm a$ の位置に置かれている。このとき、二つの平面の内外での電場を求めよ。

3.4

電荷 σ が一様に分布している、半径 a の円盤が xy 平面状にある。このとき、 $(0, 0, z)$ での電場を求めよ。ただし、

$$\int_0^a \frac{r}{\sqrt{r^2 + a^2}} dr \text{ は } r^2 = x \text{ と置換することで計算できる。}$$

また、 $z \ll a$, $z \gg a$ での電場を求め、その意味を答えよ。ただし、

$$\frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{z^2}}} \rightarrow 1 - \frac{1}{2} \frac{a^2}{z^2} \quad (z \rightarrow \infty)$$

を用いてよい。

3.5

(1)

半径 a の球の中に密度 ρ で電荷が一様に分布している。このとき、球の内外での電場を求めよ。

(2)

半径 a の球の表面に密度 σ で電荷が一様に分布している。このとき、球の内外での電場を求めよ。

(3)

半径 a の無限に長い円柱内に、密度 ρ で電荷が一様に分布している。このとき、円柱の内外での電場を求めよ。

3.6

$$E = \begin{cases} 0 & (0 < r < a) \\ \frac{A}{4\pi\epsilon} r^2 & (r > a) \end{cases} \text{ となるような電荷密度 } \rho(r) \text{ を求めよ。}$$

3.7

(1)

$+q$ の電荷が $(0, 0, \frac{d}{2})$ に、 $-q$ の電荷が $(0, 0, -\frac{d}{2})$ に存在する。このとき、この二つの電荷により作られる電場を、 $r_1 = (x, y, z - \frac{d}{2})$ 、 $r_2 = (x, y, z + \frac{d}{2})$ を用いて求めよ。

この二つの電荷を、電気双極子と呼ぶ。

(2)

$r = (x, y, z)$ について、 $r \gg d$ とする。このとき、 d の二次以上の項を無視し、さらに

$$(1 + a)^\epsilon = 1 + \epsilon a \quad (a \ll 1) \text{ を用いて } r_1^{-3}, r_2^{-3} \text{ を } r \text{ で表せ。}$$

(3)

(2) の結果を用いて E_x, E_y, E_z を r の関数として表せ。

(4)

電気双極子ベクトルを $p = (0, 0, qd)$ と定義する。このとき、(3) の結果を電気双極子ベクトルを用いてベクトル表示せよ。

15 演習問題 第四部

4.1

z 軸上の直線電流による磁場をベクトル表示せよ。

また、この結果をビオ・サヴァールの法則から導け。

4.2

(1)

z 軸を中心とする半径 a の円電流により z 軸上に作られる磁場を求めよ。(ビオ・サヴァールの法則を用いる。)

(2)

z 軸を中心とする半径 a の無限に長いソレノイド(単位長さあたりの巻き回数 n) がソレノイドの中と外に作る磁場を求めよ。ただし、ソレノイドに流れる電流を I とし、ソレノイドの端で生じる磁場の乱れは無視できるほど小さいとする。さらに、ソレノイドの外部には磁場が生じないと仮定してよい。

また、この結果をビオ・サヴァールの法則から導け。

4.3

(1)

z 軸を中心とする半径 a の円柱の表面を z 軸負から正の向きに大きさ I の電流が流れている。このとき、円柱の内外での磁場を求めよ。

(2)

xy 平面を、 y 軸負から正方向へ線密度 i の電流が流れている。このとき、磁場を求めよ。

4.4

ビオ・サヴァールの法則をマクスウェル方程式から導け。

16 演習問題 第五部

5.1

次の場合にスカラーポテンシャル ϕ , 又はベクトルポテンシャル A をポワソン方程式を用いずにもとめよ。また、(1) ~ (4) はポワソン方程式を用いて求めよ。

ただし、ラプラシアン of 極座標系での表示

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

円筒座標系での表示

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

を用いてよい。

(1)

原点に存在する電荷 q の点電荷

(2)

z 軸上に存在する電荷線密度 σ の直線電荷

(3)

xy 平面に存在する電荷面密度 σ の平面電荷

(4)

z 軸上で大きさ I の直線電流

(5)

xy 平面状 x 軸負から正の方向へ大きさ I の平面電流

(6)

z 軸を中心とする電流 I , 単位長さあたりの巻き回数 n の無限長ソレノイドの中心でのベクトルポテンシャル

17 演習問題 第六部

6.1

y 方向負から正の向きに磁場がかかっている。いま、 x 軸を中心として半径 a の円形の銅線が回転している。このとき、誘導起電力時刻 t の関数としてを求めよ。

18 演習問題 第七部

7.1

電気容量 C のコンデンサーが接続されている回路に、 $I = I(t)$ という電流を流すことを考える。このとき、コンデンサー間の変位電流を求めよ。ただし、コンデンサーとは、そのコンデンサー間の電場が

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon d} \quad (d \text{ は平面電荷間の距離})$$

となるような平面電荷の組である。また、平面電荷は本来面積が発散しているが、ここでは有限で S としてよい。

19 演習問題 第八部

波動方程式の解（ダランベールの解）については別紙振動・波動論を参照せよ。

8.1

(1)

$$E_z = E_0 \sin 2\pi \left(\frac{y}{\lambda} - \nu t \right)$$

$$B_z = B_0 \sin 2\pi \left(\frac{y}{\lambda} - \nu t \right)$$

が波動方程式の解のひとつであることを示せ。

(2)

(1) の電磁波が存在するところに、半径 a のループを置く。このとき、ループをどの方向へ向ければ誘導起電力が最大になるか。

8.2

微小な距離 d だけ離れた二点間に、一定の電流 I が流れている。このときの電流から十分遠方での磁場を以下の二通りの方法で計算せよ。

(1)

電流に対するビオ・サヴァールの法則

(2)

片方からもう一方へ電荷が移動しているので、強度の増している電気双極子と見ることができる。この場合の電場の変位電流による磁場

20 演習問題 第九部

9.1

静止座標系において、磁場 B が y 軸負から正方向へかかっている。ここへ、原点に電荷 q を置く。このとき、静止系から見ると電荷は速度が 0 なので磁場によるローレンツ力を受けないで静止している。しかし、 x 正方向へ一定の速度 v で動いている観測者から見ると電荷は動いているので、磁場によるローレンツ力が z 方向へ働く。

このローレンツ力と釣り合っている力は何か考えてみよ。厳密な計算は必要ない。

9.2

大きさ B の磁場内で、長さ l 、速さ v の導体棒に生じる起電力を求めよ。

9.3

(1)

電気量 e 、速さ v 、密度 n の電子が断面積 S の導体中を通るとき、導体に流れる電流を求めよ。

(2)

電子が受けるローレンツ力を計算することで大きさの磁場中で、長さの導体棒に大きさの電流が流れているときに導体棒が受ける力を求めよ。

9.4

向かい合った直線電流がお互いに単位長さに及ぼす力はいくらか。

21 演習問題 第十部

10.1
$$\int_V \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{B} - \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{E} dV = - \int_V \frac{1}{2\mu} \frac{\partial}{\partial t} B^2 dV - \int_V \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial}{\partial t} E^2 dV$$
を示せ。

10.2
$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2\varepsilon} E^2 \right) &= \frac{1}{\mu} \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) - \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2\mu} B^2 \right) &= -\frac{1}{\mu} \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) \\ \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) &= \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \end{aligned}$$
を示せ。

10.3

電場 $\mathbf{E}$ の中に電気双極子モーメント $\mathbf{p}$ をおいた場合のエネルギーは $-\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$ であることを示せ。

10.4

電磁波のポインティングベクトルの大きさはエネルギー密度の和に光速 c をかけたものに等しいことを示せ。

22 演習回答 第一部

1.1

略。

23 演習回答 第二部

2.1

略。

24 演習回答 第三部

$r^2 = x^2 + y^2$ とする。

3.1

$$\begin{aligned} E &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{\rho}{r^2 + z^2} \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2 + z^2}} dz \\ &= \frac{\rho}{2\pi\varepsilon r} \end{aligned}$$

3.2

平面を円状に積分する。

$$E = \int_0^\infty \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{2\pi r \cdot \sigma}{r^2 + z^2} \cdot \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} dr$$

$$= \frac{\sigma}{2\epsilon}$$

3.3

一つの平面電荷による電場は平面の両面で

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon}$$

なので、

$$E = \begin{cases} 0 & (-a < z < a) \\ \frac{\sigma}{\epsilon} & (z < -a, a < z) \end{cases}$$

3.4

$$E = \int_0^a \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{2\pi r \cdot \sigma}{r^2 + z^2} \cdot \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} dr$$

$$r^2 = x \text{ とすると } r dr = \frac{1}{2} dx \text{ なので}$$

$$= \int_0^{a^2} \frac{\sigma z}{4\epsilon} \frac{1}{(x + z^2)^{\frac{3}{2}}} dx = -\frac{\sigma z}{2\epsilon} \left\{ \frac{1}{\sqrt{a^2 + z^2}} - \frac{1}{z} \right\} = \frac{\sigma}{2\epsilon} \left\{ 1 - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right\}$$

これは、 $z \rightarrow 0$ では $E \rightarrow \frac{\sigma}{2\epsilon}$ (平面電荷)

$$z \rightarrow \infty \text{ では } \frac{\sigma}{2\epsilon} \left\{ 1 - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right\} \simeq \frac{\sigma a^2}{4\epsilon z^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{\pi a^2 \cdot \sigma}{z^2} \text{ (点電荷)}$$

と近似できる。

3.5

(1)

ガウスの法則より

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{\rho}{r^2} \cdot \frac{4}{3}\pi a^3 = \frac{\rho a^3}{3\epsilon r^2} \text{ (球の外)}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{\rho}{r^2} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{\rho r}{3\epsilon} \text{ (球の中)}$$

(2)

ガウスの法則より

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{\rho}{r^2} \cdot \frac{4}{3}\pi a^3 = \frac{\rho a^3}{3\epsilon r^2} \text{ (球の外)}$$

$$E = 0 \text{ (球の中)}$$

(3)

半径 r 、高さ a の円柱にガウスの法則を適用すると

$$\int_S E dS = \frac{Q}{\epsilon}$$

より

$$E \cdot 2\pi r \cdot a = \frac{\rho}{\epsilon} \cdot \pi r^2 \cdot a$$

$$E = \frac{\rho r}{2\epsilon} \text{ (円柱の中)}$$

$$E \cdot 2\pi r \cdot a = \frac{\rho}{\epsilon} \cdot \pi a^2 \cdot a$$

$$E = \frac{\rho a^2}{2\epsilon r} \quad (\text{円柱の外})$$

3.6

ガウスの法則 (微分形) より

$$\rho = \epsilon \nabla \cdot \mathbf{E} = \begin{cases} 0 & (0 < r < a) \\ \frac{A}{2\pi} & (r > a) \end{cases}$$

3.7

(1)

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3} + \frac{-q}{4\pi\epsilon} \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3} - \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3} \right)$$

(2)

$$r_1^2 = x^2 + y^2 + \left(z - \frac{d}{2} \right)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - zd + \frac{d^2}{4} \simeq r^2 - zd$$

$$r_2^2 = x^2 + y^2 + \left(z + \frac{d}{2} \right)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + zd + \frac{d^2}{4} \simeq r^2 + zd$$

なので、

$$r_1^{-3} = (r^2 - zd)^{-\frac{3}{2}} = r^{-3} \left(1 - \frac{zd}{r^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \simeq \left(1 + \frac{3}{2} \frac{zd}{r^2} \right) r^{-3}$$

$$r_2^{-3} = (r^2 + zd)^{-\frac{3}{2}} = r^{-3} \left(1 + \frac{zd}{r^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \simeq \left(1 - \frac{3}{2} \frac{zd}{r^2} \right) r^{-3}$$

(3)

(1) へ (2) を代入して

$$E_x \simeq \frac{qx}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{3zd}{r^5}$$

$$E_y \simeq \frac{qy}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{3zd}{r^5}$$

$$E_z \simeq \frac{q}{4\pi\epsilon} \left(z - \frac{d}{2} \right) \left(1 + \frac{3}{2} \frac{zd}{r^2} \right) r^{-3} - \frac{q}{4\pi\epsilon} \left(z + \frac{d}{2} \right) \left(1 - \frac{3}{2} \frac{zd}{r^2} \right) r^{-3} \simeq \frac{qd}{4\pi\epsilon} \cdot \left(\frac{3z^2}{r^2} - 1 \right) r^{-3}$$

(4)

$$E_z = \frac{qz}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{3zd}{r^5} - \frac{qd}{4\pi\epsilon r^3}$$

なので、

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left(\frac{3qdz}{r^5} \mathbf{r} - \frac{\mathbf{p}}{r^3} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon r^3} \left(\frac{3\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^2} \mathbf{r} - \mathbf{p} \right)$$

であり、このベクトルによる表示が最も一般的な電気双極子による電場を表している。

25 演習回答 第四部

4.1

$$\mathbf{B} \cdot 2\pi r = \mu \mathbf{I} = \mu \left(-\frac{I}{r} y, \frac{I}{r} x, 0 \right)$$

なので、

$$\mathbf{B} = \frac{\mu I}{2\pi r^2} (-y, x, 0)$$

ビオ・サヴァールの法則について、今、

$$\mathbf{r} = (x, y, z)$$

$$\mathbf{r}' = (0, 0, z')$$

$$d\mathbf{r}' = (0, 0, dz')$$

なので、

$$B(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu I d\mathbf{r}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{\mu I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-y, x, 0)}{(x^2 + y^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}} dz' = \frac{\mu I}{2\pi} \frac{(-y, x, 0)}{x^2 + y^2}$$

4.2

(1)

まず

$$\mathbf{r} = (0, 0, z)$$

$$\mathbf{r}' = (a, 0, 0)$$

$$d\mathbf{r}' = (0, da, 0)$$

として微小部分 $d\mathbf{r}'$ により作られる磁場を求める。

$$d\mathbf{B}_+ = \frac{\mu I d\mathbf{r}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{\mu I (zda, 0, -ada)}{4\pi (a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

同様に

$$\mathbf{r}' = (a, 0, 0)$$

$$d\mathbf{r}' = (0, da, 0)$$

とすると

$$d\mathbf{B}_- = \frac{\mu I d\mathbf{r}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{\mu I (-zda, 0, -ada)}{4\pi (a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\mathbf{B} = \int_C (d\mathbf{B}_+ + d\mathbf{B}_-) = \int \frac{\mu I (0, 0, -a)}{4\pi (a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} da = \frac{\mu I (0, 0, -a^2)}{2 (a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

(2)

ソレノイドの側面に垂直な長さ $2a \times a$ の正方形を考える。アンペールの法則より

$$a \frac{B}{\mu} = anI$$

$$B = \mu nI$$

ビオ・サヴァールの法則で解くと (1) より

$$B = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{n\mu I}{2} \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} dz = \mu nI$$

4.3

(1)

円柱の中はアンペールの法則より明らかに $B = 0$ なので、円柱の外を考える。

半径 r の円盤で円柱と同じ中心を持つ C を考えると、アンペールの法則より

$$\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu I$$

$$\mathbf{B} \cdot 2\pi r = \mu I$$

$$B = \frac{\mu I}{2\pi r} \text{ (直線電流と同じ)}$$

(2)

曲線 C を平面電流と垂直な、長さ $l \times l$ の長方形にとると
アンペールの法則より

$$2l \cdot B = \mu i \cdot l$$

$$B = \frac{\mu i}{2}$$

方向は平面と平行で、電流の向きと直行する。

4.4

略。

26 演習回答 第五部

5.1

(1)

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} (x, y, z) \text{ なので}$$

$$\phi = -\frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

または、原点以外では電荷密度は 0 なのでポワソン方程式を用いて

$$\nabla^2 \cdot \phi = 0$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} \phi = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{A}{r^2}$$

$$\phi = -\frac{A}{r} + B$$

ここで、原点について考えるが、原点では $\rho = \infty$ なので、半径 d の球に密度 ρ で電荷が分布していると仮定し、最後に必要ならば極限をとる。 $q = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi d^3$ なの

で、ポワソン方程式は

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \phi \right) = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \phi = -\frac{\rho}{3\epsilon} r + \frac{C}{r^2} = -\frac{q}{4\pi\epsilon d^3} r + \frac{C}{r^2}$$

$$\phi = -\frac{\rho}{6\epsilon} r^2 - \frac{C}{r} = -\frac{q}{8\pi d^3 \epsilon} r^2 - \frac{C}{r} + D$$

これが $r = d$ で $\phi = -\frac{A}{r} + B$ に一致し、かつ $\frac{\partial \phi}{\partial r}$ も一致するので

$$A = \frac{q}{4\pi\epsilon}, B = \frac{q}{8\pi d \epsilon} + D, C = 0, D = -\frac{q}{8\pi d \epsilon} (B \text{ が発散しないため})$$

となり、同じ答えが得られる。

(2)

$$E = \frac{\rho}{2\pi\epsilon(x^2 + y^2)} (x, y) \text{ なので}$$

$$\phi = -\frac{\rho}{4\pi\epsilon} \log(x^2 + y^2)$$

z 軸上以外では電荷密度は 0 であり、また対称性より

$\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$ なので、ポワソン方程式を用いると

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{A}{r}$$

$$\phi = A \log r + B$$

ここで、 z 軸上について考える。しかし、 z 軸上では $\rho = \infty$ なので、半径 d の円柱内に密度 ρ で電荷が分布している場合を考え、必要ならば後で極限をとる。

$\sigma = \rho \cdot \pi d^2$ なので、

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{\sigma}{\pi d^2 \varepsilon}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{\sigma}{2\pi d^2 \varepsilon} r + C \log r$$

$$\phi = -\frac{\sigma}{4\pi d^2 \varepsilon} r^2 + C(r \log r - r) + D$$

これが $r = d$ で $\phi = -A \log r + B$ に一致し、かつ $\frac{\partial \phi}{\partial r}$ も一致し、どの値も発散しないためには

$$A = -\frac{1}{4\pi \varepsilon}, B = 0, C = \frac{1}{4\pi \varepsilon d}, D = \frac{1}{4\pi \varepsilon}$$

(3)

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon |z|} (0, 0, z) \text{ なので}$$

$$\phi = \begin{cases} -\frac{\sigma}{2\varepsilon} z & (z > 0) \\ \frac{\sigma}{2\varepsilon} z & (z < 0) \end{cases}$$

または、ポワソン方程式より

$$\nabla^2 \cdot \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

だが、 $z \neq 0$ においては $\rho = 0$ であり、また、対象性より明らかに $\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$

なので、ポワソン方程式は

$$\frac{d^2 \phi}{dz^2} = 0$$

$$\frac{d\phi}{dz} = A \text{ (} A \text{ は定数)}$$

さらに、 $z = 0$ について考えるが、 $z = 0$ では $\rho = \infty$ なので、厚さ $2d$ の板に電荷密度 ρ で電荷が分布していると仮定する。(後に極限をとる) このとき、 $\rho = \frac{\sigma}{2d}$ なの

のでポワソン方程式は

$$\frac{d^2 \phi}{dz^2} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon d}$$

$$\frac{d\phi}{dz} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon d} z + B$$

これが $z = \pm d$ では A と一致するので、 $B = 0, A = \pm \frac{\sigma}{2\varepsilon}$

となり、答えが求まった。

(4)

$$B = \frac{\mu I}{2\pi(x^2 + y^2)}(-y, x, 0) \text{ なので}$$

$$\mathbf{A} = (0, 0, -\frac{\mu I}{4\pi} \log(x^2 + y^2))$$

また、ポワソン方程式を用いると、 z 軸上以外では電流密度は 0 で、
 $\nabla^2 \mathbf{A} = 0$

(2) と同様に

$$\mathbf{A} = (a_x \log r + b_x, a_y \log r + b_y, a_z \log r + b_z)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial r} = -\frac{\mu \sigma}{\pi d^2} (0, 0, 1)$$

なので (2) と同様にして

$$\mathbf{A} = (0, 0, -\frac{\mu I}{4\pi} \log r)$$

(5)

$$B = \frac{\mu i}{2} (0, 1, 0) \text{ なので}$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu i}{2} (kz, 0, -(1-k)x) \text{ (} k \text{ は任意の定数、ゲージ対称性から一つには定まらない)}$$

(6)

$$B = nI(0, 0, 1)$$

なので

$$\mathbf{A} = nI(ky, -(1-k)x, 0) \text{ (} k \text{ は任意の定数)}$$

27 演習回答 第六章

6.1

今、 z 軸に平行な面の面積は $\pi a^2 \cdot \cos \omega t$ なので

$$V = -\pi a^2 \omega B \sin \omega t$$

このとき誘導電場は

$$2\pi a \cdot E = -\pi a^2 \omega B \sin \omega t$$

より

$$E = -\frac{a^2 \omega B}{2} \sin \omega t$$

28 演習回答 第七部

7.1

$$q = \int_0^t I(t) dt$$

$$\text{なので、} \sigma = \frac{q}{S}, \quad E = \frac{1}{\varepsilon S d} \int_0^t I(t) dt$$

$$\varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{I(t)}{Sd} = \rho(t) \text{ (電流密度)}$$

このように、変位電流は導体のない空間にも導体の続きに同じ電流が流れているかのようにふるまう。

29 演習回答 第八部

8.1

(1)

略。

(2)

波は y 方向に進み、 z 方向へ振幅を持つので、 x 方向。

(起電力の計算は略。)

8.2

(1)

定義通り

$$d\mathbf{r}' = (0, 0, d)$$

$$\mathbf{r}' = (0, 0, 0)$$

$$\mathbf{r} = (x, y, z)$$

として

$$\frac{\mu I d\mathbf{r}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{\mu I d}{4\pi r^3} x$$

(2)

電気双極子による電場は 3.7 より

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon r^3} \left(\frac{3\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^2} \mathbf{r} - \mathbf{p} \right)$$

$$\mathbf{p} = (0, 0, qd)$$

なので

$$\mathbf{E} = \left(0, 0, \frac{1}{4\pi\varepsilon} \left\{ \frac{3pz^2}{r^5} - \frac{p}{r^3} \right\} \right)$$

$(0, 0, z)$ を中心とした半径 x の円を考えると

$$\int_C B ds = \frac{\partial}{\partial t} \int_S \varepsilon E dS$$

$$B \cdot 2\pi x = \varepsilon \mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p}{2\varepsilon} \frac{x^2}{r^3} \right)$$

$$B = \frac{\mu}{4\pi r^3} x \cdot \frac{\partial p}{\partial t}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = Id \text{ より一致する。}$$

30 演習回答 第九部

9.1

誘導電場。ただし、正確な理解には相対性理論が必要である。

9.2

磁束の変化率は Blv なので

$$V = Blv$$

9.3

(1)

銅線の断面を単位時間に通る電気量が電流の定義なので

$$I = nevS$$

(2)

一つの速さ v の電子が磁場から受ける力は

$$f = evB$$

である。

また、導体棒中には nIS の電子があるので

$$F = BIl$$

9.4

直線電流の作る磁場は

$$B = \frac{\mu I}{2\pi r}$$

なので

$$F = \frac{\mu I_1 I_2}{2\pi r}$$

31 演習回答 第十章

ソレノイド、平面電荷などのエネルギー等は別紙電磁気学応用を書く予定。

10.1

$$\begin{aligned} & \int_V \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{B} - \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{E} dV \\ &= \int_V \frac{1}{\mu} \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) dV - \int_V \epsilon \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} dV \\ &= \int_V \frac{1}{\mu} \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) dV - \int_V \frac{\epsilon}{2} \frac{\partial}{\partial t} E^2 dV \\ &= - \int_V \frac{1}{\mu} \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} dV - \int_V \frac{\epsilon}{2} \frac{\partial}{\partial t} E^2 dV \\ &= - \int_V \frac{1}{2\mu} \frac{\partial}{\partial t} B^2 dV - \int_V \frac{\epsilon}{2} \frac{\partial}{\partial t} E^2 dV \end{aligned}$$

10.2

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2\epsilon} \mathbf{E}^2 \right) = \frac{1}{\epsilon} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) - \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2\mu} \mathbf{B}^2 \right) = \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E})$$