1　はじめに

まだ未完成です。現在演習問題製作中。
この文書は、電磁気学の理解の助けにするために作られたものである。
構成としては、まず第一部でいくつかの必要な数学的定理を示し、第二部で電磁気学の基礎方程式であるマクスウェル方程式を説明し、その後様々な条件の下でマクスウェル方程式の解を考えてゆく。
具体的には、第三部では静電場の発散を、第四部では静磁場の発散を、第五部では静電場の回転を、第六部では静磁場の回転扱い、第七部、第八部でポテンシャルについて触れ、、静電磁場の理論とする。
また、基本的に人間は電場・磁場を「見」たり、「聞い」たりできないので、直感的理解はしにくいが、場の理論なのでそういう場が存在すると受け入れるのがもっとも良い理解のしかたである。（もちろん、実験により場の存在を確かめることは常に必要だが。）
また、マクスウェル方程式は覚えるしかない。力学で運動方程式を導く方法はないことと同様である。ただし、マクスウェル方程式は基本的に積分しないと直感的意味のない方程式なので、積分形を念頭において方程式の意味を考えてほしい。
このことから第二部まではあえて方程式や定義を列挙しているのみであり、第三部以降を読むことでマクスウェル方程式を直感的に理解していくようになっている。
また、常に意識してほしい発想として、場の話なので、場を足し合わせる（＝積分する）場合にはその積分の仕方としては、面積分（面に垂直な成分の和）、線積分（線と平行な成分の和）、体積積分（単純なベクトルの和）の三種類が常に存在しているということを念頭に置き、どの和を取ることで意味のある法則が導けるかを考えて積分していることに注意してほしい。
なお、同時並行で演習プリントをこなすことを強くお勧めする。

2　第一部　概念

この第一部では、まず電磁気学の概念を述べた後、必要なベクトル解析の定理を大まかに示す。決して数学的に厳密に示しはしないことに注意。詳しくはベクトル解析の参考書を見ること。

電磁気学の目的は、物体に力を及ぼし得る場、特に電場と磁場についての振る舞いを知ることにある。すなわち、電場 E と磁場 H について、
$E = E(x, y, z, t)$
$H = H(x, y, z, t)$
と二つの場を位置と時間の関数として表現できれば、電磁気学の問題が解けたことになる。そこで、この二つの表式を求めるために、基礎方程式としてマクスウェル方程式という方程式群を用いる。

また、これらの方程式の解を求め、その意味を理解し、現実の問題に対応させることも電磁気学の大きな目標の一つである。
また、ここでは電荷、電流の意味は既知とする。（力学から定義されるものなため）

定理・定義

演算子∇を、
$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$
と定義する。これにより $A = (a, b, c)$ について
$\nabla A = \left(\frac{\partial a}{\partial x}, \frac{\partial b}{\partial y}, \frac{\partial c}{\partial z}\right)$ （A の傾きと呼ぶ）
$\nabla \cdot A = \dfrac{\partial a}{\partial x} + \dfrac{\partial b}{\partial y} + \dfrac{\partial c}{\partial z}$ (A の発散と呼ぶ)
$\nabla \times A = \left(\frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial z}, \frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial c}{\partial x}, \frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y}\right)$ （A の回転と呼ぶ）
である。
ガウスの定理
$\displaystyle\int_S A \cdot dS = \int_V \nabla \cdot A dV$
言葉で言うと、A の発散をある空間についてすべて足し合わせたものは、その空間の境界面に垂直な A の成分を足し合わせたものに等しい。
ストークスの定理
$\displaystyle\int \nabla \times A \cdot dS = \int_C A \cdot ds$
言葉で言うと、ある閉曲線 C についての A の経路積分は、その閉曲線を境界とする任意の面に垂直に A の回転を足し合わせたものに等しい。

3　第二部　マクスウェル方程式

さて、いよいよ電磁気学の基礎理論であるマクスウェル方程式を説明する。
まず、電荷 q をもつ粒子が $\boldsymbol{r}$ の位置に存在するとき、力 $\boldsymbol{F}$ を受けるとき、
$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}, q) = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})q$
により電場 $\boldsymbol{E}$ を定義する。
さらに、電荷分布によらず、任意の閉曲面 S について、
$\displaystyle\int_S \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{dS} = \frac{Q}{\varepsilon} = \int_V \frac{\rho}{\varepsilon} dV$ (ρ は電荷密度 , Q は閉曲面 S 内の全電荷の総和)
が成立する。これをガウスの法則という。
また、ガウスの定理より、上の式を変形して
$\displaystyle\int_V \nabla\cdot\boldsymbol{E} dV = \int_V \frac{\rho}{\varepsilon} dV$
であり、さらに積分範囲が一致しているので、
$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon}$ （ガウスの法則微分形）
となる。当然この式は積分することで始めて直感的意義を持つ。

また、さらに、電場の回転の満たすべき定理として

$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial \boldsymbol{t}}$ (電磁誘導の法則)

がある。

ちなみに、マクスウェル方程式を原理として採用する場合、上記の電場の定義、次の磁場の定義は特に必要ではない。（マクスウェル方程式は場の存在定理と考えることもできるため）

ここから、磁場を定義し、磁場の発散に関するマクスウェル方程式を紹介する。そこで、磁場を定義するための式として、任意の電流の周りを囲んでいる閉曲線 l について

$$\int_l \boldsymbol{H} \cdot dl = \boldsymbol{I}$$

により磁場 $\boldsymbol{H}$ を定義する。

さらに、定数 μ を用いて、磁束密度 $\boldsymbol{B}$ を

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$$

と定義し、磁束密度が満たすべきマクスウェル方程式を

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu(\boldsymbol{j} + \varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial \boldsymbol{t}})$$

とする。（$\boldsymbol{j}$ はその点における電流（面）密度、$\int_S \boldsymbol{j} dS = \boldsymbol{I}$）

まとめると、

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial \boldsymbol{t}}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu(\boldsymbol{j} + \varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial \boldsymbol{t}})$$

であり、これらの方程式について考えるのが電磁気学である。（もちろん、各式ともに積分して意味を持つものであり、現時点ではただの方程式として捕らえればよい）

4　第三部　静電場の発散

さて、まずは静電場の発散

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

について考える。ガウスの法則により体積積分して

$$\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{E} dV = \int_V \frac{\rho}{\varepsilon} dV$$

$$\int_S E \cdot dS = \frac{Q}{\varepsilon} \quad （Q \text{ は体積 } V \text{ の中の全電荷}）$$

これは言葉で言うと、「任意の閉曲面Sについて、Sに垂直な電場の和は、そのSで囲まれた空間の中にある全電荷に等しい」ということである。
さて、ここから有用な電場に関する結論として、点電荷、直線電荷、平面電荷による電場を求めてみる。。
まず、一つの点電荷（電気量 q）が作る電場を求めてみる。
閉曲面Sとしては点電荷を中心とする半径rの球形の空間を考え、対称性からこの球面上で電場が一定であるとするとると、

$$\int_S E \cdot dS = \frac{q}{\varepsilon}$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon}$$

ここから

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{r^2}$$ (クーロンの法則)

が導かれる。
次に、直線電荷について考えると、
Sとして直線電荷が円の中心を通る長さ l, 半径 r の円柱を考える。対称性から円柱の側面では電場の強さが一定で、上面・下面では０、直線電荷の線密度は $\rho(C/m)$ とすると

$$\int_S E \cdot dS = \int_V \frac{\rho}{\varepsilon} dV$$

$$E \cdot l \cdot 2\pi r = \frac{1}{\varepsilon}\rho l$$

$$E = \frac{\rho}{2\pi\varepsilon r}$$

となる。
さらに、面電荷（電流の面密度 σ）を考える。今回は、面で二等分される一辺 l の立方体を考え、面と平行な部分でのみ一定の電荷が得られるとすると

$$\int_S E \cdot dS = \int_V \frac{\sigma}{\varepsilon} dV$$

$$2l^2 \cdot E = \frac{1}{\varepsilon}\sigma l^2$$

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon}$$

このように、対称性とうまいSの選び方により大体の問題が解かれる。

5　第四部　静磁場の発散

$$\nabla \cdot B = 0$$

について考える。が、右辺が０なのでガウスの法則を使って積分すると

$$\int_S B \cdot dS = 0$$

であり、これは、Bを矢印として描くと、Sで囲まれた空間Vに入った矢印は必ずVから出ていき、Vから出る矢印は必ずその前にVへと入っていることを意味し

ている。つまり、磁束密度 B は、ある点から突然生まれたり（発散）せず、常につながって循環（回転）している。
磁場の発散については、この事実を理解できればよい。（電場で言えば、電荷がないのだから考える余地はあまりない）

6　第五部　静電場の回転

静電場とは、時間によって電場・磁場が変化しない場合を考えているということである。
よって、今の仮定は
$\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\partial E}{\partial t} = 0$ なので、静電場の回転の方程式は
$\nabla \times E = 0$
ストークスの定理より
$\int_C E \cdot dl = 0$
つまり、電場を閉曲線に沿って足し合わせると 0 になる。
磁場の逆で、発散はあるが回転はないのである。残りの議論は非静止場の部で解説する。

7　第六部　静磁場の回転

さて、静電場の回転は存在しなかったが、静磁場に関しては、マクスウェル方程式に $\frac{\partial E}{\partial t} = 0$ を代入して
$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{j}$
$\boldsymbol{j} = \frac{\partial \boldsymbol{I}}{\partial S}$
ここで、$\boldsymbol{j}$ はベクトルなことに注意。さて、この方程式をストークスの定理で積分して
$\int_S \nabla \times \boldsymbol{B} \cdot dS = \int_S \mu \boldsymbol{j} \cdot dS$
$\int_C \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{dl} = \mu \boldsymbol{I}$　　（アンペールの法則）
つまり、「磁場を平曲線に沿って曲線との並行成分を足し合わせると、閉曲線を境界とする曲面を通る電流に定数をかけたものになる」ということになる。
この式からもわかるように、基本的には静磁場とは電流が作り出す、というのが電磁気学の発想である。後に示すが、磁石によって作られる磁場も電流が作り出したとみなすことができる。
さて、ここから有用な直線電流が作る磁場を求め、その後ビオ・サヴァールの法則を示す。

直線電流については、C を直線電流に垂直な平面状の半径 r の円周にとると

$$\int_C \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \mu \boldsymbol{I}$$

$$B \cdot 2\pi r = \mu I$$

$$B = \mu \frac{I}{2\pi r}$$

ここから、微小な長さ dl の直線電流により作られる磁場を求めてみる。
直線電流が原点に z 軸方向に存在するとして、磁場を観測する位置を $\boldsymbol{r}$ とする。

8　第七部　スカラーポテンシャル

ここからはしばらくポテンシャルについて解説する。
まず、スカラーポテンシャル $\phi(x, y, z)$ を

$$\nabla\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right) = -E$$

となるような関数と定義する。（この関数の存在の証明は省略）このとき、この式をマクスウェル方程式

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$$

へ代入して（第二式はスカラーポテンシャルの定義とベクトル算法から自明）

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

となり、二つの方程式はこの一つの方程式に帰着される。この方程式をポワソン方程式という。
つまり、静電場の問題に関してはマクスウェル方程式の二つの式を解く代わりに、このポワソン方程式を解くことでスカラーポテンシャルを求め、それを微分することで電場を求めることができる。

9　第八部　ベクトルポテンシャル

ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ を、

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = B$$

により定義する。これをマクスウェル方程式

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{j}$$

へ代入すると（第一式はベクトルポテンシャルの定義とベクトル算法から自明）

$$\nabla^2 \boldsymbol{B} = -\mu \boldsymbol{j}$$

となり、やはりポワソン方程式の形に帰着される。
つまり、静電磁場の問題はすべて、ポワソン方程式の解を求めるという単一の問題に帰結することができる。（練習問題参照）

10　第九部　電磁誘導

11　第十部　変位電流