

1 はじめに

この文章は、別紙振動・波動論で振動・波動について理解した上で、実際の問題に振動・波動論を適用することを目的としたものである。そのため、各セクションで一つの題材に的を絞って解説している。そのため、最初から読む必要はなく、必要な項のみ読めばよい。また、このため各章に演習問題とその回答をつけた。ただし、弦の振動・平面の振動は一般的に n 次元の波の平面波、球面波の理論と同じであり、この二章以降は各種の波について速度を計算しているだけなので、この二章を読むことを強くおすすめする。

全体を通して気をつけてほしいこととしては、弦の振動などにおいて実際に聞こえる音は定在波をなしている場合だけであり、定在波を作らない波については考えないことに注意してほしい。

また、特に断らない限り縦波についても横波表記を用いる。

最初の章に知っておいてほしい定義等を載せたので、適宜参照すること。

2 定義・定理

2.1 ヤング率

ヤング率とは、ある方向のひずみに対する同じ方向の応力の比例係数を定義したもので、数式では

$\frac{\sigma}{E} = \varepsilon$ (ε はひずみ (単位は %), σ は応力 = 単位面積に働く圧力、 E はヤング率。)

たとえば、ヤング率が約 100GPa である銅では、断面積 1mm²、長さ 1m のワイヤに 10kg のオモリをぶら下げると、0.1

また、この定義から、 u を縦波の変位として

$$\frac{d\sigma}{E} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u(x+dx) - u(x)}{dx}$$

である。

2.2 演習問題 ヤング率

(1)

$$\frac{d\sigma}{E} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u(x+dx) - u(x)}{dx}$$

を良く考えて納得せよ。

$u(x+dx) - u(x)$ は弦 dx の「伸び」、 dx がその弦の長さである。

2.3 (流体力学) 圧縮性流体と非圧縮性流体

圧縮性流体 … 流体の密度が変化する流体。

非圧縮性流体 … 流体の密度が変化しない流体。 $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

2.4 (流体力学) ラグランジュ微分とオイラー微分

一般の微分は

$$\frac{df}{dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{f(t+dt) - f(t)}{dt}$$

だが、二変数関数についてラグランジュ微分 $\frac{D}{Dt}$ を

$$\frac{Df}{Dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{f(x+vd t, t+dt) - f(x, t)}{dt}$$

と定義する。(やってることは力学なら全微分。これを他の一般の物理量に拡張した)

このとき、

$$\frac{f(x+vd t, t+dt) - f(x, t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla f$$

であり、

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v \cdot \nabla$$

となる。この左辺をラグランジュ微分・右辺をオイラー微分という。

2.5 (流体力学) 速度ポテンシャル

詳しくは流体力学の解説を参照。

流体(気体、液体)力学においては、流体の一部分を微小粒子として扱い、最後に極限をとることでその運動を記述する。そこで、ある流体微粒子に関して速度 v が定まるとはわかるだろう。このとき流体の密度を ρ 、流体微粒子の体積を V とする。すると

$$\frac{\partial}{\partial t}(V\rho) + \nabla \cdot (V\rho v) = 0 \quad (\text{連続の式})$$

が成り立つ。この式の意味は、「(第一項) 質量の時間変化率は、(第二項) 質量が空間から出て行く発散量に等しい」という、質量保存法則である。この式の第二式に積の微分公式を適用して

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \cdot v + \rho \nabla \cdot v = 0$$

さらに、オイラー微分によるラグランジュ微分の表現(後述)を用いると

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \cdot v$$

よって

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \nabla \cdot v$$

ここで、流体が非圧縮性流体であるとする

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

ここで、 $\nabla \phi = \mathbf{v}$ により速度ポテンシャル ϕ を定義すれば、

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (\text{ラプラス方程式})$$

となり、非圧縮性流体の速度ポテンシャルはラプラス方程式を満たすとわかった。

3 弦の振動

波が弦を伝わる場合を考えてみる。この弦のヤング率を E , 線密度を σ , 密度を ρ , 断面積 S , 張力 T として、長さは無有限大であるとする。

(1) 横波の場合

まず、弦の微小部分 dl にかかる力を考えてみる。微小部分の位置を l とすると波動関数を y として

$$\begin{aligned} \sigma \cdot dl \ddot{y} &= T \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{x=l+dl} - T \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{x=l} \\ &= T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dl \quad (\text{テイラー展開した}) \end{aligned}$$

であり、

$$\sigma \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

であるが、これは波動方程式である。(このようにして波動方程式を導く方法もある) よって、 y が波動であるための条件は

$$c = \sqrt{\frac{T}{\sigma}}$$

であり、弦を伝わる横波の速さは必ず上の式で表される。

(2) 縦波の場合

同様に運動方程式を考えるが、今回復元力を与えるのは張力でなく応力なので弦の変位を u として

$$\begin{aligned} \rho \cdot dl \ddot{u} &= \sigma(x=l+dl) - \sigma(x=l) \\ &= E \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} dl \\ &= E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dl \end{aligned}$$

よって

縦波の速さは

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

である。

3.1 定在波：固定端

今、弦の長さが l であり、振動は固定端 ($y(0, t) = y(l, t) = 0$) であるとする。この場合の(正弦波の)解を求める。

$$y = A \cos \omega t \sin kx$$

とすると境界条件より

$$k = \frac{n\pi}{l}$$

であり、また波動方程式より

$$c = \frac{\omega}{k}$$

ところで、弦の振動において波の速さは固定されているので

$$\omega = ck = \frac{n\pi}{l}c$$

となり、弦が作ることのできる定在波の角振動数は常に $\frac{\pi c}{l} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{T}{\sigma}} \\ \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \end{array} \right\}$ の定

数倍である。

$n = 1$ の場合を基準振動と呼ぶ。このことから、弦を弾いた場合に出る音は限られていることなどがわかる。

また、このとき波の実数部を考えてみると

$$y = A \cos(\omega t) \sin(kx) = \frac{A}{2} \{ \sin(\omega t + kx) - \sin(\omega t - kx) \}$$

という二つの波に分解されるが、この二つの波のそれぞれが波動方程式を満たし、速さも定在波の速さと一致することに注意。

3.2 定在波：自由端

自由端の場合、

$$kx \rightarrow kx + \frac{\pi}{2}$$

と置き換えるだけである。

3.3 定在波：自由端固定端

この場合は、

$$\sin(0 + \phi) = 0$$

$$\sin(kl + \phi) = 1$$

$$\text{より } \phi = 0, k = \frac{(2n-1)\pi}{l}$$

となる。

4 平面の振動

まず、平面の振動における波の速さを求める。弦の場合と同様にすると

$$c = \sqrt{\frac{T}{\sigma}}$$

は容易にわかる。(波の進行方向へ x 軸をとることで一次元とまったく同じように導く。)

縦波についてもまったく同じである。

4.1 定在波：平面波

固定端・自由端についてはあまり本質的でないのでここでは固定端反射であるとする。

平面波については、長方形領域で波が発生した場合に定在波となる。境界条件として

$$\psi(0, 0, t) = \psi(a, b, t) = \psi(a, 0, t) = \psi(0, b, t) = 0$$

とすると

$$\psi = Ae^{-i\omega t} \sin(k_x x + k_y y)$$

より

$$k_x = \frac{\pi m}{a}$$

$$k_y = \frac{\pi n}{b}$$

$$\omega = c|\mathbf{k}| = c\sqrt{k_x^2 + k_y^2} = \pi c\sqrt{\frac{m^2 + n^2}{a^2 + b^2}}$$

また、この説と同じ議論により n 次元平面波について

$$k_q = \frac{\pi m_q}{l_q}$$

$$\omega = \pi c \sqrt{\sum_{q=1}^n \frac{m_q^2}{l_q^2}}$$

となることがわかる。

4.2 定在波：円形波

円形波においては、円形領域で定在波が発生する。

境界条件は

$$\psi(a, \theta, t) = 0$$

であり、

$$\psi = \frac{A}{\sqrt{r}} e^{i\omega t} \sin kr$$

より

$$k = \frac{\pi n}{a}$$

となり、本質的には円形波は一次元の波と同じである。

よって、 n 次元球面波についてはすべて一次元の問題に帰化して考えられる。

5 空気・電磁波

空気（三次元波）についても、速度は一次元と同様の式で表され、

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

である。空気でも横波を考えることはできるが、発生することは稀であり、普通は縦波（音波）について考える。

また、電磁波については速度は

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

で与えられる。（別紙電磁気学参照）電磁波は音と異なり一般に横波であることが特徴である。

5.1 演習問題

平面音波について、長さ l の管に平行に入射させる。このとき、定在波を作る音の波長を求めよ。

6 津波

ここで津波について考えてみる。（流体力学の問題だが。）海水を非圧縮性流体として、

海面のの海底からの（平均の）高さを h_0 、波による変位を $\zeta(x, t)$ とし、波の一部分 dx に注目してみる。この部分の海水の速度を $\frac{dx}{dt} = u$ 、として、重力加速度を g 、海水の密度を ρ とする。

まず、位置 (x, y) の部分における圧力を考えると、

$$P(x, y) = P_0 + \rho g(h_0 + \zeta - y)$$

よって運動方程式より

$$\rho dx \frac{du}{dt} = P(x, y) - P(x + dx, y) = -\rho g \frac{\partial \zeta}{\partial x} dx$$

$$\frac{du}{dt} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x}$$

さらに、質量保存の法則（連続の式）を考える。

まず、ある時間に領域 dx に存在する質量は

$$\rho dx(h + \zeta(x, t))$$

であり、その領域に入ってくる質量は $u = \frac{dx}{dt}$ として

$$\rho(h + \zeta(x, t))u(x)$$

出て行く質量は

$$\rho(h + \zeta(x + dx, t))u(x + dx)$$

なので

$$\frac{\partial}{\partial t} \{ \rho dx (h + \zeta(x, t)) \} = \rho (h + \zeta(x, t)) u(x) - \rho (h + \zeta(x + dx, t)) u(x + dx)$$

$$\rho \frac{\partial \zeta}{\partial t} = -h \rho \frac{\partial u}{\partial x} - \rho \left\{ \zeta \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right\}$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -h \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} (u \zeta) = -h \frac{\partial u}{\partial x} \quad (\text{運動量保存則より})$$

連続の式と運動方程式より

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = gh \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}$$

よって

$$c = \sqrt{gh}$$