

1 はじめに

この文章は、振動波動論を理解する際の助けとして作成する。

ただし、この文章はあくまで振動・波動論の理論部分の説明にとどめ、実際の弦の振動・面の振動などは別紙振動波動論応用を参照すること。（定在波などある程度一般性のある概念も応用編にあるものがある）また、（光の）屈折・回折といった現象は幾何光学に属する内容なのでそちらを参照すること。

構成としては、第一部で導入としてラグランジュ方程式を導き、更にその具体的な使い方を示す。

そして第二部で離散的に配置された重りの連成振動の解を求め、最終的に極限をとることで弦の振動を記述する。

第三部では、振動の解の、基準振動の重ね合わせについてふれる。第二部の解の重ね合わせを受けて、振動を基準振動に分解する方法として、フーリエ級数、フーリエ変換というものを解説する。

第四部では、第三部までの議論を元に、波の定義となる波動方程式について説明し、三部までの振動の解の空間的配置の話から、波動の時間的变化の話へと移行する。

また、第四部まででおおよそその基礎理論は完成する。

第五部では、第四部の話を受け、単一の波の速度である位相速度を定義する。

第六部では、うなり（複数の波の塊）とうなりの速度である群速度を定義する。

第七部からは、振動における減衰について扱う。これは、そもそも波全体が一様な外力による減衰を受ける場合などに応用するためである。

第八部においては、振動における減衰に加えて、振動が減衰しない強制振動と共鳴を扱う。

最後に第九部において多次元での波動方程式を定義し、平面波・球面波について説明したあと、第十部でベッセル関数の解について考え、これにより本紙を完成とする。

また、全体を通して連続と離散の関係性、たとえば、積分を含む方程式は、シグマを含む方程式の極限であることや、微分方程式は差分方程式の極限であることといったことに注意し、連続的な波と離散的な波（連成振動）との関係といったことに注意してほしい。

なお、波の反射などについては境界条件付きの微分方程式を解く上で自然に出てくる概念なので、特に本紙では解説していない。

例、問題演習に関しては最後にまとめているので、適宜参照してほしい。

2 第一部 ラグランジュ方程式

まず、ラグランジュ方程式

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

を導く。導き方は振動論ではあまり重要でないので覚えなくても良い。

振動波動論は力学を前提としているので、必ず運動方程式であるラグランジュ方程式が必要である。

ここで、ラグランジュ方程式を導くために、ニュートンの運動の法則の代わりに、最小作用の原理を採用する。

最小作用の原理とは、ラグランジアン L を

$L(x, \dot{x}) = K - U$ (K は系の運動エネルギーの和、 U は系のポテンシャルエネルギーの和)

とした場合に、経路積分である作用 S

$$S = \int_{t_0}^{t_1} dt L(x, \dot{x}) \quad (\text{ただし } t = t_0, t_1 \text{ での } x \text{ の値は固定されている})$$

が最小となるような運動が実際の運動であるというものである。

変分原理を用いて考えると、

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} dt \delta L$$

であり、

$$\begin{aligned} \delta L &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} + \frac{\partial L}{\partial x} \delta x \\ &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{d}{dt} \delta x + \frac{\partial L}{\partial x} \delta x \\ &= \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta x \right] - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \delta x + \frac{\partial L}{\partial x} \delta x \\ &= \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta x \right] + \delta x \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} \right] \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\delta S = 0$ の式にこの δL の値を代入してみる。すると

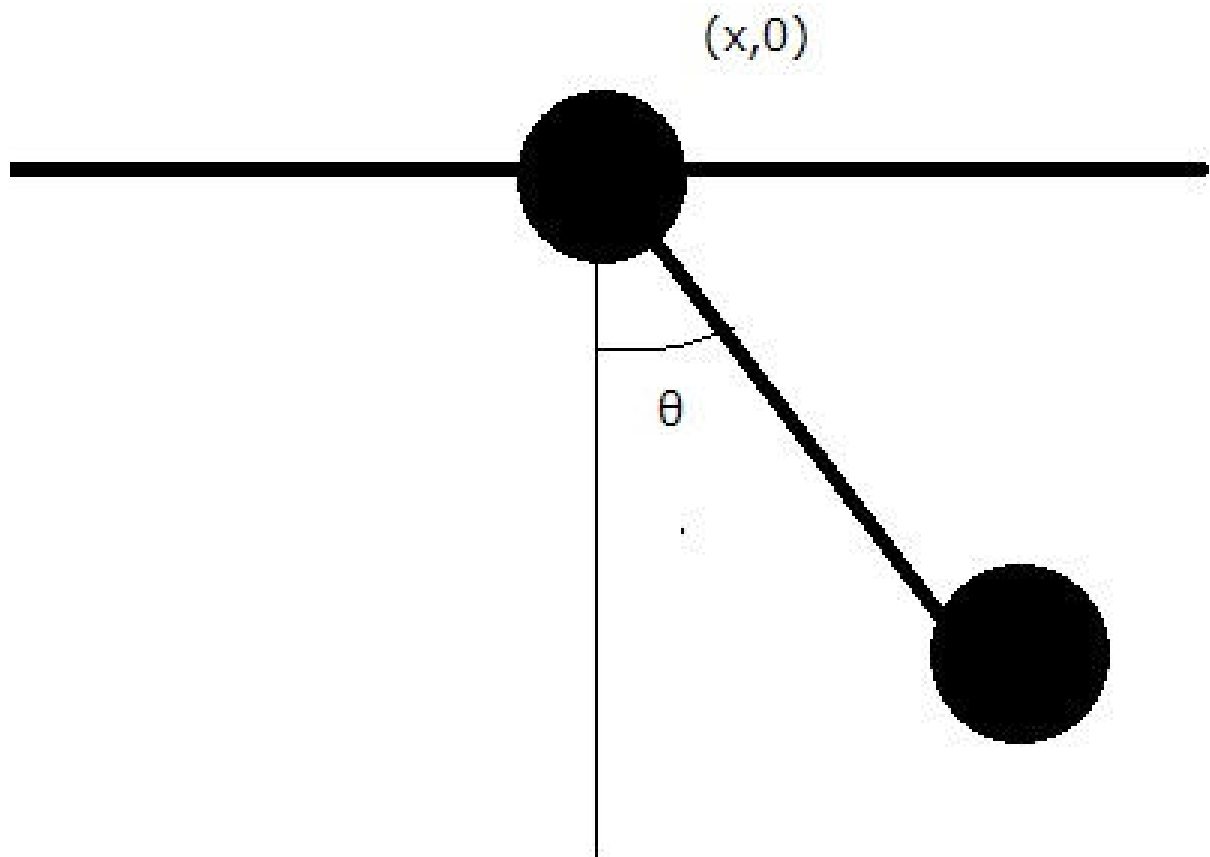
$$\delta S = \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta x \right]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} dt \delta x \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} \right] = 0$$

となるが、第一項は、 $t = t_0 = t_1$ で $x = \text{const}$, $\delta x = 0$ より 0 になる。また、第二項は経路積分で経路によって値が変わるため、恒等的に 0 であるためには

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

が必要である。これをラグランジュ方程式という。注意点としては、ラグランジアン L は系に対して定義され、 K や U はエネルギーの和であることに注意。また、ラグランジュ方程式を導く上で x について何の条件も課してはいないため、 x とい

うのは任意の座標変数にとれる。このことから、ラグランジュ方程式は質点に対して一つ定まるものでなく、変数に対して一つ定まることに注意。



(例) レール上を動ける質点に糸でつながれた質点

上図のような二つの質量 m の質点について考える。一つ目の質点はレールに固定されており、レール上の位置が x によって指定されている。

二つ目の質点は一つ目の質点に長さ l の糸でつながれており、レールとの垂線と角度 θ をなしている。このとき、この二つの質点の運動を考える。

前述のとおり、ラグランジュ方程式は任意の (質点の位置を決定できる) 変数に対して成り立つので、運動方程式は

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

であり、さらにラグランジアン L は

$$L = \Sigma K - \Sigma U$$

$$= (K_1 + K_2) - (U_1 + U_2)$$

$$= \frac{1}{2}m(v_1^2 + v_2^2) - (0 - mgl \cos \theta)$$

$$= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2) + mgl \cos \theta$$

なので、これを先ほどの方程式に代入して

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = 0$$

$$\frac{d}{dt}(ml^2\dot{\theta}) + mgl \sin \theta = 0$$

この二つの方程式から、

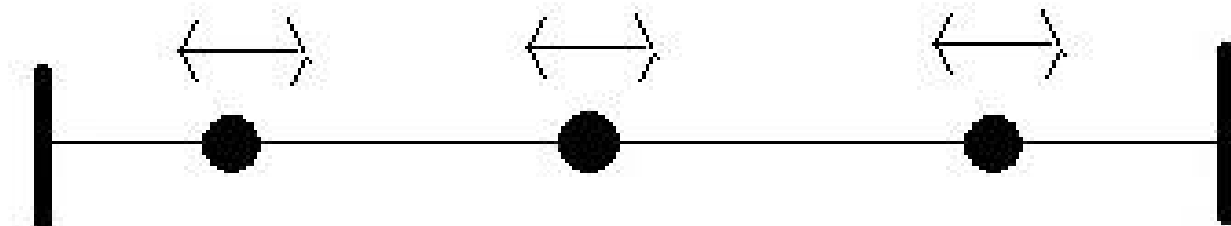
$$x = v_0 t$$

$$\theta = A \sin \sqrt{\frac{g}{l}} t \quad (\theta \ll 1 \text{ と仮定し、} \theta \cong \sin \theta \text{ とした。})$$

となり、 x, θ が時間の関数として表せたので、二つの質点の運動が完全に決定された。この例を通してラグランジュ方程式の使い方をよく理解しておくといよい。

3 第二部 離散の場合の振動

さて、第一部でラグランジュ方程式を導いたので、第二部ではいよいよ離散的な波として、複質点の連成振動について考えてゆく。そのために、まずは三質点の連成振動問題の解をもとめ、次に一般的に n 質点の解を求める。さらにこれが、 $n \rightarrow \infty$ の極限において連続波とみなせることを見てゆく。



まず、三質点の問題を考える。上の図のように、三つの質量 m の質点 (位置 q_1, q_2, q_3 基準点は左端とする。) が、それぞれの間をばね定数 K のばねで壁とつながれている。このとき、この質点の運動を考える。

ラグランジュ方程式は

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial L}{\partial q_2} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_3} - \frac{\partial L}{\partial q_3} = 0$$

であり、ラグランジアンは

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) - \frac{1}{2}K\{q_1^2 + (q_2 - q_1)^2 + (q_3 - q_2)^2\}$$

となる。これを代入して

$$\frac{d}{dt}(m\dot{q}_1) + K(2q_1 - q_2) = 0$$

$$\frac{d}{dt}(m\dot{q}_2) + K(2q_2 - q_1 - q_3) = 0$$

$$\frac{d}{dt}(m\dot{q}_3) + K(q_3 - q_2) = 0$$

ここで、解を $q_k = A_k \exp(i\omega t)$ と仮定する。すると上の三つの方程式は

$$\begin{pmatrix} 2K - m\omega^2 & -K & 0 \\ -K & 2K - m\omega^2 & -K \\ 0 & -K & 2K - m\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = 0$$

となる。この方程式の非自明解を求める。線形代数の問題なので詳しくは割愛するが、行列の $\det=0$ を解くと、

$$\omega = \sqrt{\frac{2K}{m}}, \sqrt{2 - \sqrt{2}}\sqrt{\frac{K}{m}}, \sqrt{2 + \sqrt{2}}\sqrt{\frac{K}{m}}$$

であり、このとき A について解くと

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -K^2 \\ 0 \\ K^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} K^2 \\ \sqrt{2}K^2 \\ K^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} K^2 \\ -\sqrt{2}K^2 \\ K^2 \end{pmatrix}$$

である。このとき、解がそれぞれ $K^2 \begin{pmatrix} \sin(-\frac{\pi}{2}) \\ \sin 0 \\ \sin \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$ などのように、三角関数で振

幅を表すことができることに注意。

ここまでの三質点の問題を参考に、n 質点の連成振動を考える。先ほどと同様にし

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

$$L = \frac{1}{2}M \sum_{i=1}^n \dot{q}_i^2 - \frac{1}{2}K(q_1^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (q_i - q_{i+1})^2 + q_n^2)$$

である。先ほどと同様に解を $q_i = A_i \exp(i\omega t)$ と仮定して行列表示すると

$$\begin{pmatrix}
2K - M\omega^2 & -K & 0 & 0 & \dots & 0 \\
-K & 2K - M\omega^2 & -K & 0 & \dots & 0 \\
0 & -K & 2K - M\omega^2 & -K & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & \dots & -K & 2K - M\omega^2 & -K & 0 \\
0 & \dots & 0 & -K & 2K - M\omega^2 & -K \\
0 & \dots & 0 & 0 & -K & 2K - M\omega^2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
A_1 \\
A_2 \\
A_3 \\
\dots \\
A_{n-1} \\
A_n
\end{pmatrix} = 0$$

と周期的になることは少し考えればわかる。ここから

$$\omega_l = 2\sqrt{\frac{K}{M}} \sin\left(\frac{\pi l}{2(n+1)}\right) \quad (l = 1, 2, \dots, n)$$

となることをこのあとで示す。

上の行列を連立方程式として書き下すと、

$$-M\omega^2 A_m - K(A_{m-1} - 2A_m + A_{m+1}) = 0$$

という差分方程式ができる。このとき、この式の右辺第二項を書き直すと、

$$-M\omega^2 A_m = K\{(A_{m-1} - A_m) - (A_m - A_{m+1})\} \doteq K \frac{d^2 A}{dA^2} \Big|_{A=A_m}$$

という微分方程式の離散版（差分方程式）の形になっていることに注意。

この方程式を解くために、先ほどの三質点系で A は三角関数を使ってあらわすことができたことに注意して、

$$A_m = A \sin(m\alpha + \phi)$$

と仮定してみる（A は初期条件から決まる定数）。これは m が一定なら（つまり同じ質点について）常に定数であることに注意する。

これを先ほどの差分方程式に代入すると、

$$-M\omega^2 \sin(m\alpha + \phi) - 2K(\cos \alpha - 1) \sin(m\alpha + \phi) = 0$$

$$\omega^2 = \frac{2K}{M}(1 - \cos \alpha) = \frac{4K}{M} \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

となり、境界条件 $A_0 = A \sin \phi = A_{n+1} = A \sin((n+1)\alpha) = 0$ を考えると

$$\alpha = \frac{\pi l}{n+1}$$

$$\omega_l = 2\sqrt{\frac{K}{M}} \sin\left(\frac{\pi l}{2(n+1)}\right) \quad (l = 1, 2, \dots, n)$$

を示すことができた。

これにより、n 質点の連成振動は、少なくとも全体として（すべての質点を滑らかにつなぐと）正弦曲線を描く解を n 個持つことが示された。

ここからさらに、現在の解 $q_m = A \sin(\frac{m\pi l}{n+1})e^{i\omega t}$ (離散的、質点の位置は整数 m であらわされている。) から、 $m \rightarrow \infty$ の極限をとることを考える。」

まず、 q_m の振動の中心 x_m を考えると、質点は等間隔で並んでいるので、この間隔を a とすると $x_m = ma$ とあらわすことができる。そこで、 $k_l = \frac{\pi l}{a(n+1)}$ とし
てやると、

$$q_m = A \sin(k_l x_m) e^{i\omega t}$$

と、質点の振動中心の位置 x_m の関数として q_m があらわすことができ、この状態で $ma = x_m$ の関係を保ったまま $n \rightarrow \infty, a \rightarrow 0$ の極限をとると、連続波の解 (よく見る弦の振動) になっている。

ちなみに、ここまでモデルとしては縦波を扱っていたが、別にこれらの議論は横波でも同様である。

4 第三部 フーリエ級数、フーリエ変換

第二部の議論で、

$$q(x, t) = A \sin(k_l x) e^{i\omega t}$$

という関数が (連成) 振動の解のひとつ (特解) であることは見てきた。さらに、微分方程式の解は一般に特解の線形結合で表されるため、 A を A_l で書き直して、

$$q(x, t) = \sum_{l=1}^n \{A_l \sin(k_l x)\} e^{i\omega t}$$

というのが、振動の一般解である。

これについて、解が x の関数と t の関数の積としてあらわされている (時間と空間について) 分離されていることに注意してほしい。

さて、ここで、この正弦関数の線形和、振動の空間部分はどうのような関数でありうるか (振動の解 = 波の形はどうのようなものがあるか) また、ある関数がどのような正弦関数の和であるかが問題になる (波を一つ一つの正弦関数に分離して考えられると便利なため)。

そこで、フーリエ級数というものを考え、フーリエ級数がほとんどの周期関数をあらわすことができる (テイラー展開の三角関数版) ことを見ていく。

$$f(x) = \sum_{l=1}^L C_l \sin(\frac{\pi l}{L} x)$$

という関数を考え、さらに $\frac{\pi l}{L} x \rightarrow x, L \rightarrow \infty$ の極限をとると、

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{l=1}^{\infty} (a_l \cos lx + b_l \sin lx)$$

となり、この右辺をフーリエ級数という。

ここから左辺の関数は周期 2π を持つが、区間を限定することでほとんどの関数がフーリエ級数として表現できる。(少なくとも初等関数はすべてフーリエ級数として表すことができる。)

さて、こうなると当然 a_l, b_l を求める方法が必要になる。そこで登場するのが、 $f(x)$ を 0 から 2π の範囲についてフーリエ級数の係数に変換する定理 (テイラー展開でいう「微分して 0 を代入」)

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} dx f(x) \cos(nx)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} dx f(x) \sin(nx)$$

である。特にこう表現される理由は覚える必要はないが、直感的には理解しておくとう理解の助けになる。

そこで、まずクロネッカーのデルタ

$$\delta_{n,m} = \begin{cases} 1(n=m) \\ 0(n \neq m) \end{cases}$$

を定義する。さらに、

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} dx \cos(nx) \cos(mx) = \delta_{n,m}$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} dx \cos(nx) \sin(mx) = 0$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} dx \sin(nx) \sin(mx) = \delta_{n,m}$$

なので、(証明略。積和公式を使い、三角関数の偶奇性を用いて積分すればすぐわかる)

$$f(x) = \sum_{l=1}^{\infty} (a_l \cos lx + b_l \sin lx)$$

とすると

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} dx \left\{ \sum_{l=1}^{\infty} (a_l \cos lx + b_l \sin lx) \cos nx \right\} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} dx \left\{ \sum_{l=1}^{\infty} (a_l \cos lx \cos nx) \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi} \sum_{l=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} dx \{a_l \cos lx \cos nx\} \\
&= \sum_{l=1}^{\infty} a_l \delta_{n,l} \\
&= a_l
\end{aligned}$$

となる。つまり、 $f(x)$ に $\cos nx$ をかけて積分することは、 $f(x)$ から a_l を抜き出す操作になっている。

同様に、もう一方の定理も得られる。

さて、ここまでで周期関数を三角関数展開することはできた。しかし、非周期関数を三角関数に展開できないという問題が残る。

そこで登場するのが、

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-i\omega x} f(x) \quad (\text{フーリエ変換})$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega x} F(\omega) \quad (\text{フーリエ逆変換})$$

である。これは、 x の関数 $f(x)$ を角周波数 ω の関数 $F(\omega)$ に変換するものである。直感的には、フーリエ逆変換の式を見るとわかりやすく、 $e^{-i\omega x}$ (三角関数) の係数が $F(\omega)$ であり、これを積分 (連続世界での和をとること) している。つまり、フーリエ級数とほぼ同じことをしている。(詳しくは長くなるので後述。)

5 第四部 波動方程式

さて、ここまで波の空間的配置がフーリエ級数、変換で記述できるという話をしてきたが、ここからは波が時間的に変化することを考えてゆく。

そこでここでは、波動方程式を直感的に表現した後、波動方程式を満たすような速度 v が存在することを波動の定義として採用することにする。

まず、速度 v の波とはある値 $y(x, t)$ が時間 dt 秒の後に空間的に $dx = vdt$ だけ離れた位置において観測されること、つまり

$$y(x + \Delta x, t + \Delta t) = y(x, t)$$

を速度 v の波の定義として採用する。この式から

$$y(x + dx, t + dt) - y(x, t) = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} dx + \frac{\partial y}{\partial t} dt = 0 \quad (\text{テイラー展開して二次以降の項を省略した})$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} v dt + \frac{\partial y}{\partial t} dt = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} v + \frac{\partial y}{\partial t} = 0$$

となる。ところで、今、 v は速度と定義したが、この定義を速さに変えると、向きの要素が加わるので、 $v \rightarrow \pm v$ と置き換わる。つまり、

$$\frac{\partial y}{\partial x}v + \frac{\partial y}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial x}v - \frac{\partial y}{\partial t} = 0$$

であり、このどちらかの式を満たせばよいので、二つの式をまとめて

$$v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{波動方程式})$$

を満たすことが $y(x, t)$ が速さ v の波動であることの定義とする。つまり逆に言うと、上の式を満たすような実数 v が存在するとき、 $y(x, t)$ を波動と呼ぶ。

(例)

第二部の連成振動の解

$$q = A \sin(k_l x) e^{i\omega_l t}$$

$$\omega_l = \sqrt{\frac{K}{M}} \sin\left(\frac{\pi l}{2(n+1)}\right) \quad (l = 1, 2, \dots, n)$$

$$k_l = \frac{\pi l}{a(n+1)}$$

について、

$$\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = -A k_l^2 \sin(k_l x) e^{i\omega_l t}$$

$$\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = -A \omega_l^2 \sin(k_l x) e^{i\omega_l t}$$

なので波動方程式に代入して

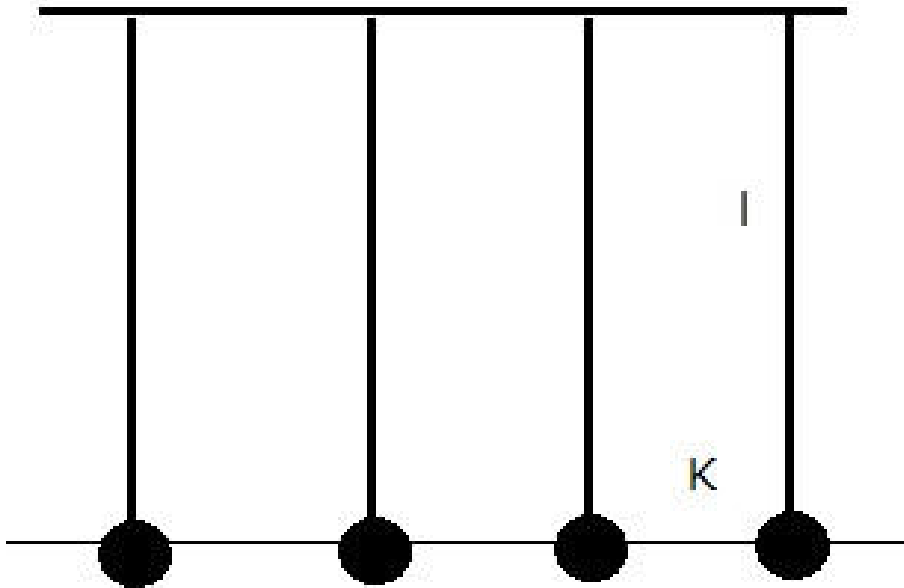
$$v^2 k^2 - \omega^2 = 0$$

$$v = \pm \frac{\omega_l}{k_l} \cong \pm a \sqrt{\frac{K}{M}} \left(\sin \frac{\pi l}{2(n+1)} = \frac{\pi l}{2(n+1)} \text{ と近似した。} \right)$$

と、このように実質的には波の速さの定義式として用いることになる。

ここの結果 $v = \frac{\omega}{k}$ は知っておくとよい。後に一般的な速度の定義式として用いる。

さて、ここで波動方程式が、実は連成振動の運動方程式の極限であることを示し、運動方程式を解く代わりに波動方程式を解くことで連成振動の解が求まることを示す。(ここでは議論の厳密さは少々省略している。)



例として、上図のように長さ l の紐につなげた質量 m の重りがお互いにばね定数 K のばねでつながれている。この問題を (近似的に) 解く。運動方程式は

$$\ddot{q}_n = -\frac{g}{l}q_n - \frac{K}{m}(2q_n - q_{n-1} - q_{n+1})$$

だが、これを

$$\ddot{q}_n + \omega_0^2 q_n = v^2 \{ (q_{n+1} - q_n) - (q_n - q_{n-1}) \}$$

と見ると、左辺はある関数の時間微分であり、右辺は二つの重りの距離を 0 にする極限をとると、差分は微分に対応するので、

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

という関数 ψ を考えたいところだが、方程式の条件を失わせないために、 q_n を ψ に、 $\{ (q_{n+1} - q_n) - (q_n - q_{n-1}) \}$ を $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$ に置き換える。(この置き換えを「連続体極限をとる」などと表現する) すると

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \omega_0^2 \psi = v^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

であり、これは波動方程式で $\psi \rightarrow \psi e^{i\omega_0 t}$ と変数変換しただけで本質的には同じ方程式であることはすぐにわかるだろう。そこでこの方程式を解くと、

$$\psi(x, t) = A \sin(kx - \omega t - \phi) \quad [= A \sin(kx) \exp(i\omega t) \text{ とほぼ同じ。}]$$

とにおいて (波数 k が出てくるのは、当然三章までの空間の議論からである) 条件から

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 + v^2 k^2}$$

となれば波動方程式の解であり、また、元の問題の解も $x \rightarrow q_n$ の位置を代入すれば元の問題の近似解になっている。結局、 q_n を ψ に、 $\{ (q_{n+1} - q_n) - (q_n - q_{n-1}) \}$ を $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$ に置き換えることで連成振動の差分方程式の (近似) 解が求まることがわ

かる。

さらに、当然のことながらこの波動方程式により連続体の振動は完全に記述される。
ということは連続体の振動に関しては波動方程式の解が問題になるが、ここで波動方程式の解について重要な二つの定理を示しておく。

波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

の解は、任意の一変数関数 θ_1, θ_2 によって

$$u(x, t) = \theta_1(x - Ct) + \theta_2(x + Ct) \quad (\text{ダランベールの解})$$

とあらわされる。(波動関数の一般解)

(証明)

$$\xi = x - Ct$$

$$\eta = x + Ct$$

と変数変換すると

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = C^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right)$$

なので

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - C^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -4C^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow u = \theta_1(\eta) + \theta_2(\xi)$$

次の定理は、

波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

の解は、初期条件 $u_{t=0} = \phi(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = C \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{t=0} = \phi_1(x)$ が与えられたとき、

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\phi(x - Ct) + \phi(x + Ct)] + \frac{1}{2C} \int_{x-Ct}^{x+Ct} dz \phi_1(z)$$

とあらわされる。

(証明)

ダランベールの解より

$$\phi(x) = \theta_1(x) + \theta_2(x), \quad \frac{1}{C} \phi_1(x) = -\theta'_1 + \theta'_2$$

第二式より

$$\theta_1(x) - \theta_2(x) = -\frac{1}{C} \int_0^x dz \phi_1(z)$$

をダランベールの解に代入することで導かれる。

6 第五部 位相速度

第五部では、位相速度を定義する。

さて、第四部最後の解を改めて書くと、

$$\psi(x, t) = A \sin(kx - \omega t) \quad (\text{初期条件の問題なので } \phi = 0 \text{ とした。})$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 + v^2 k^2}$$

であり、当然 v は波の速度だが、先ほどのように、 $\frac{\omega}{k}$ を考え、

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{\sqrt{\omega_0^2 + v^2 k^2}}{k}$$

を位相速度と定義する。位相速度は、 $\omega_0 = 0$ 、つまり、ばね以外の力がかかっていない場合には波の速度に一致する。速度 v は波全体がどのような速度で移動しているかを示しているのに対し、位相速度は、波のある一点が移動する速度を表している。あまり論理的な表現ではないが、位相速度が速度と一致する場合、波は全体として真横に動くのに対し、そうでない場合は、波が横に動くとともに、波全体が波打ち、上下の動きも加わる。また、特に $v = 0$ の場合を考えると、波全体は移動していないが、波が波打つ様子を見るとまるで波が移動しているかのように見える。これが位相速度である。

またこのことから、位相速度は見たときの直感的速度に近い。

波の速度 v は直感的速度とは異なることに注意。

7 第六部 うなりと群速度

まず、うなりについて解説するが、その際次の公理を採用する。

「波の重ね合わせの原理」… 二つの波が同一の空間上に存在するとき、二つの波は相互作用せず、二つの波の線形結合が観測される波になる。

さて、うなりとは、振動数（または波数）の近い二つの波を重ね合わせた場合に特徴的な波の形が表れることである。例えば、 $\omega_1 - \omega_2 = \Delta\omega \cong 0, k_1 - k_2 = \Delta k \cong 0$ であるとき、二つの波

$$u_1 = A \cos(k_1 x - \omega_1 t)$$

$$u_2 = A \cos(k_2 x - \omega_2 t)$$

を重ね合わせると

$$u = 2A \cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right) \cos\left(\frac{k_1 + k_2}{2}x - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right)$$

である。このとき、 $\cos(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t)$ の部分は、 $\cos(\frac{k_1 + k_2}{2}x - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t)$ の部分と比べると、波としての周期が非常に大きい。そのため、 $\cos(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t)$ の部分だけでひとつの波として評価することができる。（当然、完全にひとつの波として扱うには極限をとらなければいけない）

$$\cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right) = \cos\frac{\Delta k}{2}\left(x - \frac{\Delta\omega}{\Delta k}t\right)$$

なので、

$$v_g = \frac{\partial\omega}{\partial k}$$

を群速度として波の「群」の速さとして扱うことは、位相速度が

$$\psi(x, t) = A \sin(kx - \omega t) = A \sin k(x - v_\phi t)$$

とあらわされることから直感的であろう。また、ここから一般に群速度を上の式で定義する。(この場合以外では直感的意義があるとは限らない。)

一般に位相速度と速度が一致する場合には群速度も速度に一致する。

8 第七部 減衰振動

共鳴の説明のため、空気抵抗 $F = -\kappa\dot{x}$ を受けている条件の下での単振動の解を求める。

$$\text{運動方程式は } (\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, 2\gamma = \frac{\kappa}{m})$$

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - 2\gamma\dot{x}$$

$x = e^{\lambda t}$ と変数変換すると

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0$$

$$\lambda_{\pm} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

よって

$$x = c_1 e^{\lambda_+ t} + c_2 e^{\lambda_- t}$$

が一般解である。ここで、指数関数 $\exp$ は指数 λ によって振る舞いが違うので、場合わけをする。

1. λ が異なる実数の場合 $\Leftrightarrow \gamma > \omega_0$ の場合

解は

$$x = c_1 e^{\lambda_+ t} + c_2 e^{\lambda_- t} = e^{\lambda_+ t} [c_1 + c_2 e^{(\lambda_- - \lambda_+)t}]$$

となり、振動はせず、この関数は0に収束する。これを過減衰という。

2. λ が重解を持つ場合 $\Leftrightarrow \gamma = \omega_0$ の場合

解が

$$x = (c_1 + c_2 t) e^{\gamma t}$$

となり、任意変数一つになってしまうので、解を

$$x = c_1 e^{\gamma t} + c_2 t e^{\gamma t}$$

とおきなおす。(詳しくは微分方程式の本を参照)

この解を、臨界減衰という。

3. λ が複素数の場合 $\Leftrightarrow \gamma < \omega_0$ の場合

解が複素数の場合、実数が実際の解なので $\lambda = -\gamma \pm i\omega$ とおいて

$$c_1 = c_2 = \frac{1}{2} \text{ のとき}$$

$$x = e^{-\gamma t} \cos \omega t$$

$$c_1 = -c_2 = \frac{1}{2i} \text{ のとき}$$

$$x = e^{-\gamma t} \sin \omega t$$

よって線形結合を取って

$$x = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \alpha)$$

が一般解。これを、減衰振動という。

9 第八部 強制振動と共鳴

次に、単振動で摩擦がある場合に外部から周期的な力を受ける場合を考える。

つまり、 f を実数として

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f \cos \omega t$$

の解を求める。このとき、前章の $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ の一般解にこの方程式の特解を加えればよい。

$$x = A \cos(\omega t + \phi) = A \cos \omega t \cos \phi - A \sin \phi \sin \omega t$$

とすると

$$A(\omega_0^2 - \omega^2)(\cos \omega t \cos \phi - \sin \phi \sin \omega t) - 2\omega\gamma A \sin \omega t \cos \phi - 2\omega\gamma A \sin \phi \cos \omega t = f \cos \omega t$$

これが t の値にかかわらず成り立つので

$$A(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \phi - 2A\omega\gamma \sin \phi - f = 0$$

$$-A(\omega_0^2 - \omega^2) \sin \phi - 2A\omega\gamma \cos \phi = 0$$

$$\tan \phi = \frac{-2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$A = \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}$$

となり、強制振動の一般解は

$$x = c_1 e^{\lambda_+ t} + c_2 e^{\lambda_- t} + \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \cos(\omega t + \phi)$$

$$\tan \phi = \frac{-2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

である。さらに、ここで $\gamma = 0$ の場合を考えると、 A の値は ω と ω_0 が近い場合発散する。つまり、振動の振幅が発散する。これを共鳴という。

10 第九部 多次元系

さて、ほとんどの理論の説明は終わったが、最後に多次元系において波動方程式がどのようにあらわされるかと、その解について触れておく。

まず、容易に想像がつくように、三次元における波動方程式を

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) = 0$$

とする。

また、この方程式はナブラベクトル $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right)$

を用いると

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \psi = 0$$

とかける。さて、今簡単のために二次元における波動方程式

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) = 0$$

について考えてみよう。

一次元と同じく、変数分離型の解を求める。

解の形を

$\psi = AT(t)X(x)Y(y)$ と仮定してみると

$$\frac{1}{c^2} XY \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \left(Y \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + X \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} \right) T$$

なので、 $T = e^{-i\omega t}$ とすると

$$\frac{\omega^2}{c^2} XY = Y \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + X \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}$$

この方程式の解は

$$X = \exp(ik_x x)$$

$$Y = \exp(ik_y y)$$

$$c = \sqrt{\frac{\omega^2}{k_x^2 + k_y^2}}$$

となり、このとき

$$\begin{aligned} \psi &= A \exp\{-i(\omega t - k_x x - k_y y + \phi)\} \\ &= A \exp\{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \phi)\} \end{aligned}$$

となり、一次元の解をベクトル表示したものが解の一つであると示すことができた。

このとき $\mathbf{k}$ を波数ベクトルという。

この解は平面波を表しており、波の進行方向は波数ベクトルの向きに一致していることは $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = 0$ の場合を考えればすぐにわかる。

また、さらに別の変数分離形を考えるため、ナブラベクトルの極座標表示を考えてみる。すると

$$\nabla = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

なので、次は

$$\psi = AR(r)\Theta(\theta)T(t)$$

について考えてみる。すると波動方程式は

$$\frac{1}{c^2} R\Theta \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} \right) \Theta T + \frac{1}{r^2} RT \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \theta^2}$$

前と同様に

$$T = e^{i\omega t}$$

$$\Theta = e^{im\theta} \quad (m = 0, 1, 2, \dots \text{ 周期性のため})$$

とすると

$$-\frac{\omega^2}{c^2}R = \left(\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} \right) - \frac{m^2}{r^2}R$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \right) R = 0$$

となり、

$z = \frac{\omega}{c}r$ と変数変換すると

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z} + \left(1 - \frac{m^2}{z^2}\right) \right) R = 0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

となる。この方程式をベッセル方程式といい、実はこの方程式の解（第一種ベッセル関数、第二種ベッセル関数等）が二次元の波の一般解である。

しかし、ベッセル関数群は一般に初等関数で表せず複雑なので、ここでは特解として

$$\frac{A}{\sqrt{r}} \exp(kr - \omega t + \phi) \quad (\text{球面波})$$

が存在することを示すに留めておく。

三次元以上についても同様に、

$$\psi = A \exp\{-i\omega t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \phi\}$$

$$\psi = \frac{A}{r^{\frac{d-1}{2}}} \exp i(kr - \omega t + \phi)$$

が解として存在することは容易に示せる。

11 第十部 ベッセル関数

さて、最後に二次元の波の極座標系における一般解であるベッセル関数について説明する。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z} + \left(1 - \frac{m^2}{z^2}\right) \right) R = 0$$

12 演習問題 第一部

次の問題をラグランジュ方程式を用いて解け。

1.1

自由落下運動。重力加速度を g 、落下する物体の質量を m とする。

1.2

長さ l の振り子の単振動。 $\sin \theta = \theta$ と近似してよい。

13 演習問題 第二部

2.1

n 質点の連成振動の解を求めよ。

2.2

2.1 の解を、質点間の距離を a とおくことで連続体の解となることを確かめよ。

2.3

n 質点の連成振動について、境界条件が $q_{N+1} = q_1, q_0 = q_N$ の場合についてとけ。
(2.1, 2.2 は $q_{N+1} = q_0 = 0$ の場合である。)

2.4

本文中 k_l は波数と呼ばれ、波の波長の逆数に 2π をかけたものである。このことを k_l の定義から確かめよ。

2.5

鍊成振り子

$$\ddot{q}_n = -\frac{g}{l}q_n - \frac{K}{m}(2q_n - q_{n-1} - q_{n+1})$$

の解を求めよ。(図は第四部本文中にある。)

14 演習問題 第三部

3.1

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} dx \cos(nx) \cos(mx) = \delta_{n,m}$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} dx \cos(nx) \sin(mx) = 0$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} dx \sin(nx) \sin(mx) = \delta_{n,m}$$

を証明せよ。

3.2

次の関数をフーリエ級数としてあらわせ。

(1) $f(x) = 1 \quad (-\pi < x < \pi)$

(2) $f(x) = x \quad (-\pi < x < \pi)$

(3) $f(x) = |x| \quad (-\pi < x < \pi)$

(4) $f(x) = \begin{cases} 0 & (-\pi < x < 0) \\ x & (0 < x < \pi) \end{cases}$

(5) $f(x) = x \quad (-L < x < L)$

(6) $f(x) = x^2$

(7) $f(x) = |\sin x|$

3.3

次の関数をフーリエ変換せよ。また、逆変換せよ。ただし、

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

を用いてよい。

$$(1) f(x) = e^{-ax^2}$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} 1 & (-1 < x < 1) \\ 0 & (x < -1, 1 < x) \end{cases}$$

3.4

デルタ関数 $\delta(x)$ を、

$$\delta(x) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{4\pi a}} e^{-\frac{1}{4a}x^2}$$

と定義する。このとき、デルタ関数のフーリエ変換を求めよ。また、逆変換を求めよ。

15 演習問題 第四部

4.1

波動方程式を書き下せ。

4.2

波動方程式を用いて正弦波 $y = A \sin(\omega t - kx)$ の速度を定め、速度と角速度の関係を求めよ。

4.3

連続近似をすることで 2.3 を解け。

4.4

次の初期条件から波動方程式を解け。

(1)

$$\psi(x, 0) = \begin{cases} -x + 1 & (0 < x < 1) \\ x + 1 & (-1 < x < 0) \end{cases}$$

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial t} \right|_{t=0} = 0$$

(2)

$$\psi(x, 0) = \sin x$$

$$\dot{\psi}(x, 0) = C \cos(x)$$

$$\phi(x, 0) = \cos x$$

$$\dot{\phi}(x, 0) = C \sin(x)$$

の二つの波の重ね合わせ $\Psi(x, t)$

(3)

$$\psi(x, 0) = \exp(-x^2)$$

$$\dot{\psi}(x, 0) = 2xC \exp\{-x^2\}$$

16 演習問題 第五部

5.1

金属中では、電磁波は電子により影響を受け、プラズマ周波数 ω_p の周期の強制振動を受ける。このとき、電磁波の位相速度をもとめ、光速を超えていることを確認せよ。

17 演習問題 第六部

6.1

金属中の電磁波の群速度を求めよ。

6.2

金属中の電磁波の位相速度と群速度の相乗平均を求めよ。

18 演習問題 第七部

7.1

過減衰、臨界減衰、減衰振動の変位を示すグラフを書け。

7.2

電気回路において、コンデンサー、コイル、抵抗の電圧は

$$V_c = \frac{q}{C}, \quad V_L = \frac{dI}{dt} = -L \frac{d^2 q}{dt^2}, \quad V_R = RI = R \frac{dq}{dt}$$

とあらわされる。

RLC 直列回路についてキルヒホッフの法則を適用すると、摩擦力のある単振動と同じ方程式が得られることを確かめ、この方程式を解け。

19 演習問題 第八部

8.1

7.2 の回路について、外部電圧

$$V_e = V \cos \omega_e t$$

が加わる場合に、解を求めよ。また、共鳴の条件を求めよ。

20 演習問題 第九部

9.1

次の波動関数が波動方程式を満たすことを確かめよ。

$$\psi = A \sin(\omega t - kx) \cos(\omega t - ky) \sin(\omega t - kz)$$

9.2

一般に n 次元平面波においてその進行方向が波数ベクトルで表されることを確認せよ。

9.3

クラドニパターンとは二次元の波を視覚化する方法の一つである。どのようなものか調べてみよ。

21 演習回答 第一部

1.1

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - mgx$$

なので、ラグランジュ方程式に代入すると

$$\frac{d}{dt}(mv) = mg$$

となり、運動方程式に帰結する。以下略。他の問題も直交座標系では必ずこの形に帰結する。

1.2

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta$$

ラグランジュ方程式は

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl \sin \theta = 0$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\theta$$

$$\theta = A \sin(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \phi)$$

22 演習回答 第二部

2.1,2.2 略。本文第二部参照。

2.3

各質点の運動方程式は

$$m\ddot{q}_k + K\{(q_k - q_{k-1}) - (q_{k+1} - q_k)\} = 0$$

ここで、解を $q_k = A_k e^{i\omega t}$, $A_k = A \sin(k\alpha + \phi)$ とすると

運動方程式は

$$\omega^2 A_k + \omega_0^2 \{(A_k - A_{k-1}) - (A_{k+1} - A_k)\} = 0$$

$$\omega = \omega_0 \sqrt{(A_k - A_{k-1}) - (A_{k+1} - A_k)/A_k}$$

さらに境界条件より

$$\sin \phi = \sin(n\alpha + \phi)$$

$$\sin(\alpha + \phi) = \sin((n+1)\alpha + \phi)$$

$$\text{よって } n\alpha = 2\pi l \quad (l = 0, 1, 2, \dots)$$

であり、

$$\begin{aligned}
A_{k+1} - A_k &= A \sin((k+1)\alpha + \phi) - A \sin(k\alpha + \phi) \\
&= 2A \cos\left(\frac{2k+1}{2}\alpha + \phi\right) \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\
(A_k - A_{k-1}) - (A_{k+1} - A_k) \\
&= 2A \left[\cos\left(\frac{2k-1}{2}\alpha + \phi\right) - 2A \cos\left(\frac{2k+1}{2}\alpha + \phi\right) \right] \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\
&= 2A \left[2 \sin(k\alpha + \phi) \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right] \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\
&= 4A \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin(k\alpha + \phi)
\end{aligned}$$

なので、

$$\omega = 2\omega_0 \sin\left(\frac{\pi l}{n}\right)$$

よって

$$q_k = A \sin\left(\frac{2\pi l}{n}k + \phi\right) \exp\left[2i\sqrt{\frac{K}{m}} \sin\left(\frac{\pi l}{n}\right)t\right]$$

2.4

$$k_l = \frac{\pi l}{a(n+1)} = \frac{\pi l}{L} \quad (L \text{ はばねの全長}) \quad \text{なので、} \quad k_l = \frac{2\pi}{L}l = \frac{2\pi}{\lambda}$$

2.5

$$\ddot{q}_n = -\frac{g}{l}q_n - \frac{K}{m}(2q_n - q_{n-1} - q_{n+1})$$

$$q_n = A_n e^{-i\omega t}$$

とすると

$$\omega^2 A_n + \omega_0^2 A_n + 2\frac{K}{m}A_n + \frac{K}{m}(A_{n+1} + A_{n-1}) = 0$$

ここで、

$$A_n = A \exp(ikna)$$

とすると

$$\begin{aligned}
A_{n+1} + A_{n-1} &= A (\exp(ikna + ika) + \exp(ikna - ika)) \\
&= A \exp(ikna) \{ \exp(ika) + \exp(-ika) \} \\
&= 2A_n \cos ka
\end{aligned}$$

よって

$$\omega = \omega_0^2 + \frac{2K}{m}(1 - \cos ka) = \omega_0^2 + \frac{4K}{m} \sin^2\left(\frac{ka}{2}\right)$$

また、上の解の線形結合をとると

$$A_n = A \exp(ikna) + B \exp(-ikna)$$

として

$$A_{n+1} + A_{n-1} = 2A_n (\cos ka + i \sin ka) = 2A_n \exp(ika)$$

$$\omega = \omega_0^2 + \frac{2K}{m}(1 - \cosh ka)$$

23 演習回答 第三部

3.1

略。積和公式を用いる。

3.2

$$(1) f(x) = 1 \quad (-\pi < x < \pi)$$

$$a_0 = 2$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{n} \sin(nx) \right]_{-\pi}^{\pi} = 0 \quad (n \neq 0)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) dx = 0$$

よって

$$1 = 1$$

$$(2) f(x) = x \quad (-\pi < x < \pi)$$

$$a_n = 0 \quad (\text{奇関数なので})$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{x}{n} \cos nx \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{n} \cos nx dx = \frac{2}{n} (-1)^n$$

ゆえに

$$f(x) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{2}{n} (-1)^l \sin lx$$

$$(3) f(x) = |x|$$

$$a_0 = \pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x}{n} \sin nx \right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{n} \sin nx dx$$

この右辺は n が奇数のとき $\frac{4}{n^2\pi}$, 偶数のとき 0 であり、 $f(x)$ は偶関数なので

$$b_n = 0$$

よって

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{4 \cos(2l+1)x}{\pi(2l+1)^2}$$

$$(4) f(x) = \begin{cases} 0 & (-\pi < x < 0) \\ x & (0 < x < \pi) \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x}{n} \sin nx \right]_0^{\pi} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{n} \sin nx dx = -\frac{1}{n^2\pi} ((-1)^n - 1)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{x}{n} \cos nx \right]_0^{\pi} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{n} \cos nx dx = \frac{\pi}{n\pi} (-1)^{n+1}$$

$$(5) f(x) = x \quad (-L < x < L)$$

(2) で π を L に置き換えて

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2L}{n} (-1)^l \sin \frac{l}{L} x$$

$$(6) f(x) = x^2$$

$$a_0 = \frac{2}{3} \pi^2$$

$$\pi a_n = 2 \int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx = \left[\frac{2x^2}{n} \sin nx \right]_0^{\pi} - 2 \int_0^{\pi} \frac{4x}{n} \sin nx dx$$

$$\begin{aligned}
[Tab][Tab][Tab][Tab] &= -\frac{8}{n} \left[-\frac{x}{n} \cos nx \right]_0^\pi - \frac{8}{n} \int_0^\pi \frac{1}{n} \cos nx dx \\
[Tab][Tab][Tab][Tab] &= -\frac{8\pi}{n^2} (-1)^n - \frac{8}{n^2} \left[\frac{1}{n} \sin nx \right]_0^\pi \\
[Tab][Tab][Tab][Tab] &= -\frac{8\pi}{n^2} (-1)^n
\end{aligned}$$

$b_n = 0$ (遇関数)

$$f(x) = \frac{1}{3}\pi^2 - \sum_{l=1}^{\infty} \frac{8\pi}{n^2} (-1)^l \cos lx$$

(7) $f(x) = |\sin x|$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin x \cos nx dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \{ \sin(n+1)x + \sin(n-1)x \} dx \\
&= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{n+1} \cos(n+1)x - \frac{1}{n-1} \cos(n-1)x \right]_0^\pi \\
&= -\frac{1}{\pi(n+1)} (-1)^{n+1} - \frac{1}{\pi(n-1)} (-1)^{n-1} + \frac{1}{\pi(n+1)} + \frac{1}{\pi(n-1)}
\end{aligned}$$

$b_n = 0$ (遇関数)

以下略。

3.3

$$\begin{aligned}
(1) \quad f(x) &= e^{-ax^2} \\
F(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2 - i\omega x) dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-a(x + \frac{1}{2a}i\omega)^2 - \frac{1}{4a}\omega^2] dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{1}{4a}\omega^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2a}} \exp(-\frac{1}{4a}\omega^2) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2a}} \exp(-\frac{1}{4a}\omega^2 - i\omega x) d\omega \\
&= \frac{1}{\sqrt{2a}} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \frac{1}{4a}}} \exp(-ax^2) \\
&= e^{-ax^2} = f(x)
\end{aligned}$$

(2)

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 e^{-i\omega x} dx = \left[\frac{1}{i\omega} e^{-i\omega x} \right]_{-1}^1 = \frac{1}{i\omega\sqrt{2\pi}} (e^{-i\omega} - e^{i\omega}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \omega}{\omega}$$

3.4

$$\begin{aligned}
F(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{4\pi a}} \exp\left(-\frac{1}{4a}x^2 - i\omega x\right) dx \\
&= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a}} \exp\left\{-\frac{1}{4a}(x + 2ai\omega)^2 - a\omega^2\right\} dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\exp -a\omega^2}{\sqrt{8a\pi^2}} \cdot \sqrt{4\pi a} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\exp -a\omega^2}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \\
f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\exp -a\omega^2}{\sqrt{2\pi}} \exp(-i\omega x) d\omega \\
&= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-a\omega^2 - i\omega x) d\omega \\
&= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-a\left(\omega + \frac{ix}{2a}\right)^2 - \frac{x^2}{4a}\right\} d\omega \\
&= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\exp(-\frac{x^2}{4a})}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{a}} \\
&= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{4\pi a}} \exp\left(-\frac{1}{4a}x^2\right)
\end{aligned}$$

このことから、

$$f(x) = 1$$

のフーリエ変換は

$$F(\omega) = \sqrt{2\pi}\delta(\omega)$$

であるとわかる。

24 演習問題 第四部

$$4.1 \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

$$4.2 \quad k^2 - \frac{\omega^2}{v^2} = 0$$

なので、

$$vk = \omega$$

ここで、 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ を周期と定義し、 $f = \frac{1}{T}$ を振動数と定義する。

$$v = \frac{\lambda}{T} \text{ となる。}$$

4.3

$$m\ddot{q}_k + K\{(q_k - q_{k-1}) - (q_{k+1} - q_k)\} = 0 \text{ より}$$

(近似による) 波動方程式は

$$K \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

ただし境界条件より

$$y(0, t) = y(L, t) \quad (L = na)$$

よって解を

$$y = A \sin(\omega t - kx + \phi) \text{ とすると}$$

$$v = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

境界条件より $kL = 2\pi l$ ($l = 0, 1, 2, \dots$)

$$\omega = \frac{2\pi l}{L} \sqrt{\frac{K}{m}}$$

4.4

速度が与えられているので、

$$\psi(x, t) = \frac{1}{2} [\phi(x - Ct) + \phi(x + Ct)] + \frac{1}{2C} \int_{x-Ct}^{x+Ct} 0 dz$$

初期条件より

$$\phi(x) = \begin{cases} -x + 1 & (0 < x < 1) \\ x + 1 & (-1 < x < 0) \end{cases}$$

答えは定義域が $x - Ct$ にあわせて変わり、複雑なので省略。

(2)

$$\psi(x, 0) = \sin x$$

$$\dot{\psi}(x, 0) = C \cos(x)$$

より

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= \frac{1}{2} [\sin(x - Ct) + \sin(x + Ct)] + \frac{1}{2C} \int_{x-Ct}^{x+Ct} C \cos t dt \\ &= \sin(x + Ct) \end{aligned}$$

同様に

$$\phi(x, 0) = \cos x$$

$$\dot{\phi}(x, 0) = C \sin(x)$$

より

$$\phi = \cos(x - Ct)$$

よって

$$\begin{aligned} \psi(x, t) + \phi(x, t) &= \sin x \cos Ct + \cos x \sin Ct + \cos x \cos Ct + \sin x \sin Ct \\ &= (\sin x + \cos x)(\cos Ct + \sin Ct) \\ &= \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(Ct + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

となり、定在波が現れる。

(3)

$$\psi(x, 0) = \exp(-x^2)$$

$$\dot{\psi}(x, 0) = 2Cx \exp(-x^2)$$

より

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= \frac{1}{2} [\exp\{-(x - Ct)^2\} + \exp\{-(x + Ct)^2\}] + \int_{x-Ct}^{x+Ct} 2Ct \exp(-t^2) dt \\ &= \exp[-(x - Ct)^2] \end{aligned}$$

これはよく見るパルス波になっている。

25 演習回答 第五部

5.1

$$v_\phi = \frac{\sqrt{\omega_p^2 + c^2 k^2}}{k} = \sqrt{c^2 + \frac{\omega_p^2}{k^2}} > c$$

26 演習回答 第六部

6.1

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{c^2 k}{\sqrt{\omega_p^2 + c^2 k^2}}$$

6.2 略。

27 演習回答 第七部

7.1

7.2

キルヒホッフの法則より

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

今回は解を複素数として解いてみる。

$$q = Ae^{\omega t}$$

とすると

$$\omega^2 L + \omega R + \frac{1}{C} = 0$$

$$\omega = \frac{R \pm \sqrt{R^2 - 4\frac{L}{C}}}{2L}$$

となり、 ω の値が実数、複素数、重解の三通りで場合わけ。以下略。

28 演習回答 第八部

8.1

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = V \cos \omega t = \text{Re}(V e^{-i\omega t})$$

なので、7.2 の解にこの方程式の特解を重ね合わせる。

今回は、方程式に線形性があるので、(本質的には本文と同じだが) 解を複素数に拡張し、実数部分を解として利用する方法でといてみる。

$$q = \hat{A} e^{-i\omega t}$$

とすると方程式は

$$-\omega^2 \hat{A}L - i\omega \hat{A}R + \frac{\hat{A}}{C} = V$$

$$\hat{A} = \frac{V}{-\omega^2 L + \frac{1}{C} - i\omega R} = \frac{V}{(\frac{1}{C} - \omega^2 L)^2 + \omega^2 R^2} e^{-i\phi}$$

$$\tan \phi = \frac{\omega R}{\frac{1}{C} - \omega^2 L}$$

よって解は

$$q = \hat{A}e^{-i\omega t} = Ae^{-i(\omega t + \phi)}$$

ただし

$$A = \frac{V}{(\frac{1}{C} - \omega^2 L)^2 + \omega^2 R^2}$$

この実部をとって実際の解は

$$A \cos(\omega t + \phi)$$

共鳴条件は

$$(\frac{1}{C} - \omega^2 L) = 0$$

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} \text{ の場合。}$$

29 演習回答 第九部

9.1

略。代入すればよい。

9.2

略。 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = 0$ の場合を考えればわかりやすい。

9.3

略。