

微分方程式について

Copyright(c) 6 組

平成 21 年 1 月 31 日

1 微分方程式の性質

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

のような y の導関数が入っている方程式を 1 階微分方程式,

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$$

のような y の 2 次までの導関数が入っている方程式を 2 階微分方程式といいます.

これらの微分方程式を変形していき

$$y = f(x)$$

の形にする作業を, この微分方程式を「解く」といいます.

一般的に n 階の微分方程式を解くには n 回積分する必要があり, それゆえ任意定数が n 個 ($C_1, C_2, \dots, C_n$) 含まれます.

また、 $y =$ の形にできないこともあります, そのようなときはできるだけわかりやすい形にしておくのがいいです.

2 微分方程式の解法

2.1 最も簡単な形

対応する問題: 14.1(1)~(2)

$$y' = f(x)$$

という形ならば, 両辺 x で微分し

$$y = \int f(x)dx = F(x) + C$$

とすればよいだけです.

2.2 変数分離形

対応する問題: 14.1(3)~(14), 14.3(1)~(2)

$$g(y)y' = f(x)$$

という形に変形できれば, 両辺 x で微分し, 置換積分を行うことによって

$$\int g(y)y' dx = \int g(y)dy = G(y) = F(x) + C$$

となり解けます.

2.3 同次形

対応する問題: 14.2

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

と右辺が $\frac{y}{x}$ の関数で表わせるとき,

$$u = \frac{y}{x}$$

とおくと,

$$y' = (ux)' = u'x + u$$

より,

$$u'x + u = f(u)$$

と書き直せて,

$$\frac{u'}{f(u) - u} = -\frac{1}{x}$$

より変数分離形に帰着できます.

2.4 定数変化法

対応する問題: 14.3(3)~(16), 14.4, 14.5

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

という形になっているときを考えます. まず $Q(x) = 0$ とおくと,

$$\frac{y'}{y} = -P(x)$$

と変数分離でき,

$$\log |y| = -\int P(x)dx$$

より, $P(x)$ の原始関数のひとつを $p(x)$ とおくと,

$$y = Ce^{-p(x)}$$

と解けます.

ここで C を定数でなく $C(x)$ という x の関数だとすると, 改めて元の式に代入して

$$\begin{aligned} y' + P(x)y &= C'(x)e^{-p(x)} - P(x)C(x)e^{-p(x)} + P(x)C(x)e^{-p(x)} \\ &= C'(x)e^{-p(x)} = Q(x) \end{aligned}$$

となるので,

$$C(x) = \int e^{p(x)} Q(x) dx$$

よりより解は

$$y = e^{-p(x)} \left\{ \int e^{p(x)} Q(x) dx + C \right\}$$

という解の公式が導かれます.

公式を覚えるよりは解き方を身につけましょう.

2.5 Bernoulli 形

対応する問題: 14.6

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n$$

という形の微分方程式を考えましょう. 両辺を y^n で割ると

$$\frac{y'}{y^n} + \frac{P(x)}{y^{n-1}} = Q(x)$$

となり, $z = \frac{1}{y^{n-1}}$ と置いてみると, 両辺 x で微分し

$$z' = -(n-1) \frac{y'}{y^n}$$

より, この式は

$$-\frac{z'}{n-1} + P(x)z = Q(x)$$

となるので変数変化法に帰着できます.

3 解答例

それぞれ適当な 1 題ずつ見ていきます.

3.1 14.1(1)

両辺 x で積分し,

$$y = \int (x-1)dx = \frac{1}{2}x^2 - x + C$$

3.2 14.1(5)

両辺 y^2 で割り,

$$\frac{y'}{y^2} = 2x$$

両辺 x で積分し,

$$-\frac{1}{y} = x^2 + C$$

y について解くと,

$$y = -\frac{1}{x^2 + C}$$

*答と形は違いますが言っていることは同じ

3.3 14.2(3)

与式は

$$y' = \frac{1 - \frac{y}{x}}{1 + \frac{y}{x}}$$

と変形できるので, $u = \frac{y}{x}$ と置いてみると,

$$y' = u'x + u$$

であり, 代入して整理すると

$$u'x = \frac{1 - 2u - u^2}{1 + u}$$

より

$$\frac{1 - 2u - u^2}{1 + u}u' = \frac{1}{x}$$

両辺 x で積分し,

$$-\frac{1}{2}\log|1 - 2u - u^2| = \log|x| + C$$

これを整理すると,

$$y^2 + 2xy - x = C$$

3.4 14.3(5)

まず右辺を 0 と置いて

$$y' - 2y = 0$$

を解くと,

$$\log |y| = 2x + C$$

より

$$y = Ce^{2x}$$

を得る. 任意定数 C を x の関数として $C(x)$ と書き直し初めの式に代入すると,

$$C'(x)e^{2x} = 2e^{3x}$$

となるので,

$$C'(x) = 2e^x$$

より

$$C(x) = 2e^x + C$$

従って

$$y = 2e^{3x} + Ce^{2x}$$

3.5 14.6(1)

両辺 y^2 で割り,

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{2}{y} = e^{3x}$$

ここで $z = \frac{1}{y}$ と置いてみると,

$$z' = -\frac{y'}{y^2}$$

よりこれを代入し,

$$-z' + 2z = e^{3x}$$

これを解くと,

$$z = -e^{3x} + Ce^{2x}$$

だから,

$$y = \frac{1}{Ce^{2x} - e^{3x}}$$