

数学 IB 冬学期ノートまとめ

Copyright(c) 6 組

平成 21 年 2 月 11 日

冬学期の数 IB のテーマは主に多変数関数です。テーマとしては、

1. 多変数関数の微分 (偏微分)
2. 多変数関数の積分 (重積分)
3. 微分方程式

がメインになります。

1 多変数関数の微分

1.1 多変数関数のグラフ

これはわかるでしょう。立体だから解けるかどうかは直感にも左右されます。

無限に広がるようなグラフの場合一部分を切り出して書きますが、変数の定義域の取り方によって見える形が違うので注意です。

1.2 極限值

1 変数関数のときは

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \alpha$$

となるときに限り、

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$$

として定義できました。

ここで、2 変数関数でも

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = \alpha$$

という風に定義したいのですが、 (x,y) が (a,b) に近づく近づき方はいろいろ (一回転) あります。

なので,

$$x = a + r \cos \theta, \quad y = b + r \sin \theta$$

と極座標表示したとき,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) \equiv \lim_{r \rightarrow 0} f(a + r \cos \theta, b + r \sin \theta)$$

で定義します.

1.3 偏微分

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \equiv \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}$$

で定義します.

この計算は既に色々な授業で出てきているので大丈夫だと思います.

ちなみに, $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ の他にも $f_x(a,b)$, $\frac{\partial}{\partial x} f(a,b)$, $D_x f(a,b)$ 等と表す場合もあるらしいです.

また, 定義域内すべてで偏微分係数を持ち, それらが連続だった場合,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \equiv \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

で偏導関数を定義します.

1.4 全微分

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

で全微分を新たに定義します.

dz は曲面を接平面で近似したとき, x, y 軸方向にそれぞれ dx, dy だけ変化したときの z の変化を表しています.

つまり, これを書き換えると, 曲面 $z = f(x, y)$ の $(x, y) = (a, b)$ での接平面の方程式は

$$z - f(a, b) = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

で与えられます. また, 全微分の計算法則として

- $d(f(x, y) + g(x, y)) = df(x, y) + dg(x, y)$
- $d(kf(x, y)) = kdf(x, y)$
- $d(f(x, y)g(x, y)) = df(x, y)g(x, y) + f(x, y)dg(x, y)$

が成り立ちます. どれもすぐに導けます.

1.5 高次偏導関数

偏導関数をさらに偏微分すれば 2 次偏導関数です. たとえば, x で偏微分した後 y で偏微分したものは

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = f_{xy}(x, y)$$

等と表します.

$\frac{\partial f}{\partial x}$ の形式では右から順に, f_x 形式では左から順に偏微分していくことに要注意.

ここで, $z = e^x \cos y$ を例に見てみましょう. 2 次導関数を計算していくと,

$$\begin{aligned} z_{xx} &= e^x \cos y & z_{xy} &= -e^x \sin y \\ z_{yx} &= -e^x \sin y & z_{yy} &= -e^x \cos y \end{aligned}$$

となり, z_{xy} と z_{yx} が同じ結果になります. 他にも例を見ていってもやはり $z_{xy} = z_{yx}$ が成り立ちます.

実は, $f_{xy}(x, y), f_{yx}(x, y)$ が共に存在して連続 (つまり, C^2 級) のときは常に成り立ちます.

一般に, C^n 級のときの n 次導関数は順序に依らず等しくなるという定理があるらしいです.

1.6 合成関数の微分

$$z = f(x, y)$$

に対し, $x = g(t), y = h(t)$ と x, y が共通のパラメータ t で表わせるとき,

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

という公式が成り立ちます. 証明は以下の通り.

t が Δt だけ変化したとき, x の変化は $\Delta x = g'(t)\Delta t + o(\Delta t)$ であることを用いると, z の変化は,

$$\begin{aligned} \Delta z &= f(g(t + \Delta t), h(t + \Delta t)) - f(g(t), h(t)) \\ &= f(g(t + \Delta t), h(t + \Delta t)) - f(g(t), h(t + \Delta t)) \\ &\quad + f(g(t), h(t + \Delta t)) - f(g(t), h(t)) \\ &\simeq f(g(t) + g'(t)\Delta t, h(t + \Delta t)) - f(g(t), h(t + \Delta t)) \\ &\quad + f(g(t), h(t) + h'(t)\Delta t) - f(g(t), h(t)) \\ &\simeq \frac{\partial f}{\partial x}(g(t), h(t + \Delta t)) g'(t)\Delta t + \frac{\partial f}{\partial y}(g(t), h(t)) h'(t)\Delta t \end{aligned}$$

両辺を Δt で割り $\Delta t \rightarrow 0$ とすることで公式が示せました.

さらに, $x = g(s, t)$, $y = h(s, t)$ とパラメータが 2 つのときは, 偏微分に関して

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}, \quad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}$$

となります.

ちなみに行列表示すると,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix}$$

となり, この行列はヤコビ行列と言って後でも出てきます.

1.7 陰関数の微分公式

$f(x, y) = 0$ と陰関数表示されているとき,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

という微分公式があります. (右辺の $-$ を忘れないように注意!!)

証明は, $\frac{dx}{dy}$ を求めたい (x, y) 近辺で $y = \varphi(x)$ というように y が x の関数で表わせると仮定すると,

$$x = t, \quad y = \varphi(t)$$

を代入し,

$$f(t, \varphi(t)) = 0$$

両辺を t で微分し,

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial y} \varphi'(t) = 0$$

より,

$$\varphi'(t) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

で示せました.

また, $f(x, y) = 0$ の全微分をとってみることで,

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0$$

これを用いて接線の方程式がわかります.

1.8 多変数関数のテイラー展開

θ を $0 < \theta < 1$ の係数とし,

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{(n-1)} + \frac{f^n(\theta x)}{n!}x^n$$

というのが n 次の ($x = 0$ での) テイラー展開でした.

多変数関数についても同様にテイラー展開を考えてみたいと思います.

$f(x, y)$ を C^n 級とします.

$$F(t) = f(x(t), y(t)) = f(a + ht, b + kt)$$

に対し $n = 2$ としてテイラー展開を適用すると,

$$F(t) = F(0) + F'(0)t + \frac{F''(0)}{2!}t^2$$

ですが, ここで合成関数の微分を思い出すと,

$$\begin{aligned} F'(t) &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} \\ &= hf_x(a + ht, b + kt) + kf_y(a + ht, b + kt) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F''(t) &= h(hf_{xx}(a + ht, b + kt) + kf_{xy}(a + ht, b + kt)) \\ &\quad + k(hf_{yx}(a + ht, b + kt) + kf_{yy}(a + ht, b + kt)) \\ &= h^2 f_{xx}(a + ht, b + kt) + 2hk f_{xy}(a + ht, b + kt) \\ &\quad + k^2 f_{yy}(a + ht, b + kt) \end{aligned}$$

を代入して,

$$\begin{aligned} F(1) &= f(a + h, b + k) \\ &= f(a, b) + hf_x(a, b) + kf_y(a, b) + \frac{1}{2!} \{ h^2 f_{xx}(a + \theta h, b + \theta k) \\ &\quad + 2hk f_{xy}(a + \theta h, b + \theta k) + k^2 f_{yy}(a + \theta h, b + \theta k) \} \end{aligned}$$

これで $n = 2$ の場合が求まりました... でも大変わかりづらい.

普通は, $(a, b) = (0, 0)$, $(h, k) = (x, y)$, $n \rightarrow \infty$ として使います.

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y \\ &\quad + \frac{1}{2!} \{ f_{xx}(0, 0)x^2 + 2f_{xy}(0, 0)xy + f_{yy}(0, 0)y^2 \} + \cdots \end{aligned}$$

です. $\{ \}$ の中身の係数は 2 項係数です.

ちなみに, $x = 0$ 近傍や $(x, y) = (0, 0)$ 近傍でのテイラー展開を特にマクローリン展開ということもあります. 問題で出てくるひるまないと.

1.9 多変数関数の極大・極小

ある点 (a, b) について, 近傍のすべての点 (x, y) に対して $f(x, y) \leq f(a, b)$ が成り立てば (a, b) で極大値を, $f(x, y) \geq f(a, b)$ が成り立てば (a, b) で極小値をとっているといいます.

これらの求め方ですが, その前にまず

$$f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$$

が成り立てばその (a, b) を停留点といいます. 極大・極小となる点は停留点に含まれます.

次に,

$$H_f(a, b) = \begin{vmatrix} f_{xx}(a, b) & f_{xy}(a, b) \\ f_{yx}(a, b) & f_{yy}(a, b) \end{vmatrix} \left(= \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} \text{とおく} \right)$$

という関数について考えることで判別していきます. これはヘッシアンと呼ばれます.

i) $H_f(a, b) > 0$ のとき

$A < 0$ ならば極大,

$A > 0$ ならば極小.

ii) $H_f(a, b) < 0$ のとき

極大でも極小でもない.

iii) $H_f(a, b) = 0$ のとき

これだけでは判別できない.

証明は, $f(x, y)$ を (a, b) 近傍で 2 次のテイラー展開すると, 仮定より

$$f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$$

なので,

$$f(a+h, b+k) \simeq f(a, b) + \frac{1}{2!} \{Ak^2 + 2Bhk + Ck^2\}$$

ここで $H_f(a, b)$ は $\{ \}$ の判別式となっているので,

$H_f(a, b) > 0$ かつ $A < 0$ ならば $\{ \}$ は必ず負, $A > 0$ ならば $\{ \}$ は必ず正であり,

$H_f(a, b) < 0$ ならば正にも負にもなれるということです.

1.10 条件付き極値問題

夏学期の情報の講義でも突然登場したラグランジュの未定係数法です.

$$g(x, y) = 0$$

を満たす (x, y) に対して $f(x, y)$ の極値を考えると,

$$f_x(x, y) - \lambda g_x(x, y) = 0 \quad \text{かつ}$$

$$f_y(x, y) - \lambda g_y(x, y) = 0$$

を満たす λ が存在し, その (x, y, λ) を考えればよいというものです.

ただし $g(x, y)$ には $g_x(x, y) = g_y(x, y) = 0$ となる (x, y) はないとします.

実際には

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$$

と関数をおいて,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0$$

という式を解いて求めます.

では証明しちゃいましょう. 極値を取る点 (a, b) では $g_y(a, b) \neq 0$ とし, 陰関数の微分のときと同様 $y = \varphi(x)$ と表せるとします. $f(x, y)$ は,

$$f(x, y) = f(x, \varphi(x)) = h(x)$$

と 1 変数関数になり,

$$h'(x) = f_x(x, \varphi(x)) + f_y(x, \varphi(x)) \varphi'(x)$$

$h(x)$ の極値条件より

$$h'(a) = f_x(a, b) + f_y(a, b) \varphi'(a) = 0$$

また, $g(x, \varphi(x)) = 0$ の両辺を x で微分することで,

$$g_x(a, b) + g_y(a, b) \varphi'(a) = 0$$

すなわち,

$$\varphi'(a) = \frac{f_x(a, b)}{f_y(a, b)} = \frac{g_x(a, b)}{g_y(a, b)}$$

となるので, $\varphi'(a) = -\lambda$ とおくことで示せました.

仮定より $g_x(a, b) = g_y(a, b) = 0$ とはならないので, $g_y(a, b) = 0$ のときは $x = \varphi(y)$ と表すことで解決します.

2 多変数関数の積分

2.1 線積分

$$C = \{(x, y) | x = x(t), y = y(t), a \leq t \leq b\}$$

という曲線 C 上に沿って 2 変数関数 $f(x, y)$ の積分を考えます.

このとき,

$$\int_C f(x, y) dt \equiv \int_a^b f(x(t), y(t)) dt$$

で曲線 C 上の線積分を定義します. また, $x'(t)dt = dx, y'(t)dt = dy$ より, たとえば $f(x, y) = g(x, y)x'(t) + h(x, y)y'(t)$ のとき,

$$\begin{aligned} \int_C f(x, y) dt &= \int_a^b (g(x, y)x'(t) + h(x, y)y'(t)) dt \\ &= \int_a^b g(x, y)dx + h(x, y)dy \end{aligned}$$

となります.

たとえば力学で, $F(x, y) = (F_x(x, y), F_y(x, y))$ という力を曲線 C に沿って $a \rightarrow b$ へ加えた仕事は

$$\begin{aligned} W &= \int_C (F_x(x, y)dx + F_y(x, y)dy) \\ &= \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \end{aligned}$$

でこれも線積分です.

ところで, ゆっくりと移動させたなら, 位置エネルギー $V(x, y)$ が定義できるとき,

$$\begin{aligned} W &= \int_a^b \frac{dV}{dt} dt \\ &= V(x(b), y(b)) - V(x(a), y(b)) \end{aligned}$$

なので, この積分は経路に依らないことになります. こういうときの F は保存力といいます.

上の 2 式を比較することで,

$$F_x = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad F_y = \frac{\partial V}{\partial y}$$

が言えます. ではどのようなとき保存力となるかというと,

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$$

ならば

$$(\text{左辺}) = \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x}, \quad (\text{右辺}) = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}$$

より成立します.

2.2 重積分

2 変数関数 $f(x, y)$ を領域 D で積分した

$$\iint_D f(x, y) dx dy$$

について考えます.

これは 1 変数のときの考え方を拡張して, 領域 D を微小面積 $dx \times dy$ で分割していった極限をとったものですが, 以下の性質が言えます.

- D が有界で, 閉じた領域ならば D の形はなんでもいい
- $f(x, y)$ が連続ならば, 積分は収束する.
- 分割のしかたに依らず同じ値をとる.

要は D の形と $f(x, y)$ の形に合わせて分割を考えていかないと詰みます.

計算は, 例えば $D = [a, b] \times [c, d]$ ならば

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

を考えればいいだけですが, $D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$ の場合は

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

の順番で考えなければいけません.

2.3 変数変換

分割を考えていく時に, 単に長方形で分割していった解けるならばいいですが, たとえば領域の境界が曲線のときはうまくいかない時があります. そのため, 極座標等に変換する必要がありますが... 変数変換すると微小領域の面積が変わってしまいます. そこで

$$u = \varphi(x, y), \quad v = \psi(x, y)$$

と新たな変数 u, v に積分変換するとき,

$$dudv = \left\| \begin{array}{cc} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{array} \right\| dx dy = J dx dy$$

とすれば解決します. J はヤコビアンといいます.

なぜこうなるかというと,

$$d\mathbf{x} = (dx, 0), \quad d\mathbf{y} = (0, dy)$$

だけ x, y 方向にそれぞれ変化したとすると,

$$d\mathbf{u} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx, \frac{\partial u}{\partial y} dy \right), \quad d\mathbf{v} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx, \frac{\partial v}{\partial y} dy \right)$$

であり, du, dv で作られる平行四辺形の面積は

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x} dx \frac{\partial v}{\partial y} dy - \frac{\partial u}{\partial y} dy \frac{\partial v}{\partial x} dx \right| = J$$

となるからです.

2.4 広義積分

先ほどの重積分の定義では D が無限に広がる場合, $f(x, y)$ がある点において発散する場合に積分を定義できていません. そこで

- D が無限に広がる場合, $\lim_{n \rightarrow \infty} D_n = D$ となる領域 D_n を考え,

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} f(x, y) dx dy$$

で定義する.

- $f(x, y)$ がある点 $(a, b) \in D$ で発散する場合, (a, b) は除外して考える

というように拡張します.

これを利用し, ガウス分布の積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx$$

が求められます.

R_n を半径 n の円の内部ととると, $dx dy = r dr d\theta$ と極座標に変換し,

$$\begin{aligned} \iint_{R_n} e^{-a(x^2+y^2)} dx dy &= \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{R_n} e^{-ar^2} r dr d\theta \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2\pi \int_0^n r e^{-ar^2} dr \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{a} (1 - e^{-an^2}) = \frac{\pi}{a} \end{aligned}$$

一方,

$$\begin{aligned} \iint_{R_n} e^{-a(x^2+y^2)} dx dy &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ay^2} dy \right) \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx \right)^2 \end{aligned}$$

なので,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

となります.

2.5 曲面積

曲面 $z = f(x, y)$ について,

$$\iint f(x, y) dx dy$$

は $z = 0$ と $z = f(x, y)$ によって囲まれる体積ですが,
重積分を用いると曲面の面積も求めることができます.

曲面の中で微小領域 $[x, x + dx] \times [y, y + dy]$ の上にある部分を平行四辺形で近似すると,

dx によって与えられる変化は

$$\mathbf{a} = (dx, 0, f_x(x, y)dx)$$

dy によって与えられる変化は

$$\mathbf{b} = (0, dy, f_y(x, y)dy)$$

であるから, この平行四辺形の面積は

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \left| \begin{pmatrix} -f_x(x, y)dx dy \\ -f_y(x, y)dx dy \\ dx dy \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1 + (f_x(x, y))^2 + (f_y(x, y))^2} dx dy$$

これを積分していくと, 曲面の面積は

$$\iint \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

であることがわかります.

3 微分方程式

同梱の bibun.pdf を参考にしてください.

4 その他

- 間違いとか質問とかは進木まで.
- 授業中配られたプリントは結構失くしちゃった... のでまとめてう p は難しいです.
- 牛腸のノート提出は 2/13(金) に数理科学研究棟の 2 階の 219 号室です.