

- * 解答用紙 両面1枚, 計算用紙1枚
- * 主な対象クラス: 01 理科1類21~24組(1年生)
- * 試験日時: 2月15日(金)2時限(1108教室) 10:50~12:20(90分間)
- * 持ち込み不可
- * 空欄のある問題については, 空欄に当てはまる数値, 数式, 語句を答えよ.
- * すべての解答に途中経過を書くこと.

1. 区間 $R = (0, 1) \times (0, 1)$ 上の関数 $f(x, y) = \frac{x(1-x)y(1-y)}{1-xy}$ について, 以下の間に答えよ. なお, 必要なら $\alpha = (\sqrt{5}-1)/2$ とおいてもよい.

- (a) $f(x, y)$ の R における停留点を求めよ.
 (b) すべての $(x, y) \in R$ に対して, $f(x, y) < 1-y$ を示せ.
 (c) $f(x, y)$ の R における最大値は $\boxed{1}$ である.

2. 原点 $O(0, 0)$ から曲線 $y = 1/(1+x^2)$ 上の点 $P(x, y)$ までの距離 OP の最小値を求めたい. 以下の間に答えよ.

- (a) $F(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - \lambda(y(1+x^2) - 1)$ とおく. F_x, F_y, F_λ を求めよ.
 (b) $F_x = F_y = F_\lambda = 0$ を満たす組 (x, y, λ) をすべて求めよ.
 (c) $x = \boxed{2}$ のとき, OP は最小値 $\boxed{3}$ をとる.

3. 次の積分を計算せよ.

- (a) $\int 3x\sqrt{1+x^2} dx$ (b) $\int e^{ax} \cos(bx) dx$, ただし $ab \neq 0$ とする.

4. 積分 $I = \int_0^1 \int_0^1 \frac{dx dy}{1-x^2 y^2}$ について, 以下の間に答えよ.

- (a) 変数変換 $x = \frac{\sin \theta}{\cos \phi}$, $y = \frac{\sin \phi}{\cos \theta}$ は三角形 $\Delta = \{(\theta, \phi) \mid \theta > 0, \phi > 0, 0 < \theta + \phi < \frac{\pi}{2}\}$ から区間 $R = (0, 1) \times (0, 1)$ への全単射を与えることを示せ.
 (b) 上の変数変換のヤコビアン $\frac{\partial(x, y)}{\partial(\theta, \phi)}$ を x, y の式で表せ.
 (c) 以上より, $\zeta(2) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots = \boxed{4}$ である¹.

5. 定数 e に関する2条件

- (i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$, (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

を考える. 高校生のA君は(i) $\Rightarrow$ (ii)を次のように示した.

(i)の両辺を x 倍して $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1) = \lim_{x \rightarrow 0} x$. 両辺に1を足して $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)$.
 両辺を $\frac{1}{x}$ 乗して $e = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$. ここで, 特に $x = \frac{1}{n}$, $n \rightarrow \infty$ とすれば(ii)が示される!

A君, 残念だけど君の議論はどこかおかしいよ. なぜ間違ってしまったのか優しく教えてあげて欲しい.

一年間, 静かに(?)講義を聴いてくれて, ありがとうございます. 皆さん, 大変熱心に勉強されるので, 感心しています. これからの人生は長いので, 心身の健康にも十分に留意してください.

¹ Hint: I を2通りに計算する.