

数学IB(理I 18-21) 2005 後期試験 植野義明

- 2006 年 2 月 14 日 2 時限目 (10:50~12:20)
- 筆記用具以外持込不可
- すべての解答に途中経過を書くこと。

[1] (1) 数列 $\{a_n\}$ が条件 $\forall n \geq 1 \quad |a_n - a_{n+1}| < \frac{1}{n(n+1)}$ を満たせば収束することを示せ。

(2) $\lim_{x \rightarrow 0+} x^x$ を求めよ。

[2] (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ は収束するか。

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ は収束するか。

[3] $f_n(x) = \sqrt{\frac{1}{n^2} + x^2}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ のとき

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ を求めよ。収束は一樣か。

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$ を求めよ。収束は一樣か。

[4] (1) $\int_0^1 \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$ が収束する α の範囲を求めよ。(670)

(2) $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ をガンマ関数 $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt$ を用いて表せ。

[5] $f(x, y) = \arctan \frac{x}{y}$ とおく。

(1) $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ。

(2) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を求めよ。

[6] (1) $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ のとき、 $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$ を求めよ。

(2) $D = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 1\}$ のとき、 $\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2} d(x, y)$ を計算せよ。