

数学 IB 2006 後期追試験 植野義明

- 筆記用具以外持込不可
- すべての解答に途中経過を書くこと。

1 (1) 収束する数列 $\{a_n\}$ は有界であることを示せ。

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\cos 3x)}{\log(\cos 2x)}$ を求めよ。

2 (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ は収束するか。

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n$ は収束するか。

3 $f(x) = x \sin \frac{1}{x}, f(0) = 0$ は $x = 0$ で連続だが、微分可能でないことを示せ。

4 $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)(x_{k+1} - x_k)$ において、 $f(x) = x^\alpha, x_k = q^k (k = 0, 1, \dots, n)$ とおく。ただ

し、 $\alpha \neq -1, q = \sqrt[n]{b}$ である。

(1) S_n を q, n, α の式で表せ。

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を b, α の式で表せ。

5 $f_n(x) = (n+1)x^n(1-x), x \in A = [0, 1], n = 1, 2, 3, \dots$ のとき

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ を求めよ。

(2) 収束は一様か。

6 $f(x) = \arctan x$ の $x = 0$ における Taylor 級数を $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n+1}$ とする。

(1) a_n を求めよ。 ($n = 0, 1, \dots$)

(2) 収束半径 ρ を求めよ。

7 $f(x, y) = x^3 + 6xy + y^3$ とおく。

(1) $f(x, y)$ の停留点を求めよ。

(2) 各停留点において、 $f(x, y)$ の極大・極小を判定せよ。

8 (1) $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ のとき、 $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$ を求めよ。

(2) $D = \{(x, y); 4 \geq x^2 + y^2 \geq 1, x, y \geq 0\}$ のとき、 $\iint_D xy \, dx \, dy$ を計算せよ。