数学 IB 2006 後期試験 植野義明

- 2006 年 2 月 15 日 2 時限目 (10:50〜12:20)
- **筆記用具以外持込不可**
- すべての解答に途中経過を書くこと。

$\boxed{1}$ (1) 数列 $\{a_n\}$ が有界で、ある実数 q が存在して条件 $\limsup a_n < q$ を満たせば、有限個の n を除いて $a_n \leq q$ であることを示せ。

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0+} (\sin x)^x$ を求めよ。

$\boxed{2}$ (1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$ は収束するか。

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}$ は収束するか。

$\boxed{3}$ $f(x) = \dfrac{x^2}{2} - \cos x$ の極値を求めよ。

$\boxed{4}$ $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)(x_{k+1} - x_k)$ において、$f(x) = x^\alpha, x_k = q^k \, (k = 0, 1, \ldots, n)$ とおく。ただし、$\alpha \neq -1, q = \sqrt[n]{b}$ である。

(1) S_n を q, n, α の式で表せ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を b, α の式で表せ。

$\boxed{5}$ $f_n(x) = (n+1)x^n(1-x), x \in A = [0, 1], n = 1, 2, 3, \ldots$ のとき

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ を求めよ。

(2) 収束は一様か。

$\boxed{6}$ $f(x) = \arctan x$ の $x = 0$ における Taylor 級数を $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n+1}$ とする。

(1) a_n を求めよ。$(n = 0, 1, \ldots)$

(2) 収束半径 ρ を求めよ。

$\boxed{7}$ $f(x, y) = x^3 + 6xy + y^3$ とおく。

(1) $f(x, y)$ の停留点を求めよ。

(2) 各停留点において、$f(x, y)$ の極大・極小を判定せよ。

$\boxed{8}$ (1) $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ のとき、$\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$ を求めよ。

(2) $D = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$ のとき、$\displaystyle\iint_D y \, dx \, dy$ を計算せよ。