

章末問題の解答。問題は教科書に書いているので省略。教科書持っていない人はお友達にみせてもらおうか購入するかしましようね。

7 多次元の確率分布

1. 先に (ii) を示す。 $V(X) = E(X - E(X))^2$ ，さらに期待値の加法性より、

$$\begin{aligned} V(aX + bY) &= E((aX + bY) - E(aX + bY))^2 \\ &= E((aX + bY) - E(aX) - E(bY))^2 \\ &= E((aX - E(aX)) + (bY - E(bY)))^2 \\ &= E((aX - E(aX))^2 + E(bY - E(bY))^2 + (aX - E(aX))(bY - E(bY))) \\ &= E(aX - E(aX))^2 + E(bY - E(bY))^2 + E(aX - E(aX))(bY - E(bY)) \\ &= a^2V(X) + b^2V(Y) + 2abCov(X, Y) \end{aligned}$$

さらに、この式に $a = 1$, $b = 1$ を代入すると、(i) が得られる。(証明終了)

2. (i)

$$\begin{aligned} E(R_p) &= E(xR_1 + (1-x)R_2) \\ &= xE(R_1) + (1-x)E(R_2) \\ &= xe_1 + (1-x)e_2 \\ &= (e_1 - e_2)x + e_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(R_p) &= V(xR_1 + (1-x)R_2) \\ &= x^2V(R_1) + (1-x)^2V(R_2) + 2x(1-x)Cov(R_1, R_2) \\ &= (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2)x^2 - 2(\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2)x + \sigma_2^2 \end{aligned}$$

- (ii) (i) で求めた $V(R_p)$ の式の両辺を x で微分して、イコール 0 とすると、

$$\frac{d}{dx}V(R_p) = 2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2)x - 2(\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2) = 0$$

(x の係数) = 0 のとき、 $\rho = 1$, $\sigma_1 = \sigma_2$ より、定数項も 0 になり、 x の値によらず成立。

(このとき、 $V(R_p) = \sigma_2^2$)

(x の係数) $\neq 0$ のとき (このとき $|\rho| \leq 1$ より、必ず (x の係数) > 0)、

$$x = \frac{\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}$$

ここで $x < 0$ とすると、分散 $\sigma_1, \sigma_2 \neq 0^{*1}$ として、

$$x = \frac{\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2} < 0$$

から、

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} < \rho$$

*1 現実の話、分散が 0 とかありえないし。

同様に $x > 1$ とすれば、

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} < \rho$$

が得られる。

以上から、 $V(R_p)$ は、

- $\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \leq \rho$ のとき、最小値 $\sigma_2^2 (x=0)$
- $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \leq \rho$ のとき、最小値 $\sigma_1^2 (x=1)$
- それ以外の時、最小値

$$\frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2 (1 - \rho^2)}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2} \quad \left(x = \frac{\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}\right)$$

(iii) (i) の式に代入して計算。文明の利器、電卓を活用すると、

$$E(R_p) = 0.143x + 0.055$$

$$V(R_p) = 0.14x^2 + 0.20x + 0.36$$

3. 授業でやってるので省略。答えは講義資料に詳しく (?) 載ってます。

4. (a) 方法 (I)

分散 σ^2 の天秤で重さ m_A , m_B をダイレクトに量るので、この方法での測定誤差の分散はやはり σ^2 。

(b) 方法 (II)

測定された重さの和を X 、差を Z とする。このとき、 $\frac{X+Z}{2}$ 、 $\frac{X-Z}{2}$ が、 m_A , m_B の重さだと推定される。ここで、問題 1 の結果より、

$$V\left(\frac{X \pm Z}{2}\right) = \frac{1}{4}V(X) + V(Z) = \frac{1}{2}\sigma^2 (X, Z \text{ は無相関})$$

よって、測定誤差の分散は $\frac{1}{2}\sigma^2$

したがって、II の方がすぐれた方法である。

5.

$$\begin{aligned}
Cov(U, V) &= E(UV) - E(U)E(V) \\
&= E(acXY + adX + bcY + bd) - E(aX + b)E(cY + d) \\
&= acE(XY) + adE(X) + bcE(Y) + bd - acE(XY) - adE(X) - bcE(Y) - bd \\
&= ac(E(XY) - E(X)E(Y)) \\
&= acCov(X, Y)
\end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned}
V(U) &= E((aX + b) - E(aX + b))^2 \\
&= E(aX + b - aE(X) - b)^2 \\
&= aE(X - E(X))^2 \\
&= a^2V(X)
\end{aligned}$$

同様に

$$V(V) = c^2V(Y)$$

したがって

$$\begin{aligned}
\rho_{UV} &= \frac{Cov(U, V)}{\sqrt{V(U)}\sqrt{V(V)}} \\
&= \frac{acCov(X, Y)}{ac\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}} \\
&= \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}} \\
&= \rho_{XY} \quad (\text{証明終了})
\end{aligned}$$

6. まず (ii) を解く。

(ii) X と cX+Y の相関係数が ρ になるから、

$$\rho = \frac{Cov(X, cX + Y)}{D(X)D(Y)} = \frac{E\{X(cX + Y)\} - E(X)E(cX + Y)}{\sqrt{\sigma_X^2}\sqrt{c^2\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}}$$

ここで、X, Y は N(0,1) にしたがうので、 $E(X) = E(Y) = 0$ 、 $\sigma_X = \sigma_Y (= E(X^2)) = 1$ 。また、X, Y は独立なので、 $E(XY) = E(X)E(Y) = 0$ 。したがって、

$$\rho = \frac{c}{\sqrt{c^2 + 1}}$$

これを解くと、

$$c = \pm \frac{\rho}{\sqrt{1 - \rho^2}}$$

±は無くて良いので、答えは、

$$c = \frac{\rho}{\sqrt{1 - \rho^2}}$$

(i) これに $\rho = 0.5$ を入れて、答えは $c = \frac{1}{\sqrt{3}}$

(iii)(ii) より $U' = X, V' = \frac{\rho}{\sqrt{1 - \rho^2}}X + Y$ なら、 U', V' の相関係数は ρ 。X、Y が N(0,1) にしたがうとき、 $\rho_{kX, lY} = \rho_{X, Y}$ なので (k, l は 0 でない実数)、上の U', V' に適当な定数をかけて分散の値を調節すると、

$$U = \sigma U' = \sigma X, \quad V = \sigma \cdot \sqrt{1 - \rho^2} \cdot V' = \sigma(\rho X + \sqrt{1 - \rho^2} Y)$$

7. パスです。やり方は下と同じ。

8.

$$F(u) = P(X_1 \leq u)P(X_2 \leq u) \cdots P(X_n \leq u), f(u) = F'(u)$$

$$F(v) = P(v \leq X_1)P(v \leq X_2) \cdots P(v \leq X_n), f(v) = F'(v)$$

よって、

(i)

$$F(u) = u^n, \quad f(u) = nu^{n-1}, \quad F(v) = (1-v)^n, \quad f(v) = n(1-v)^{n-1}$$

(ii)

$$F(u) = (1 - e^{-\lambda u})^n, \quad f(u) = n\lambda e^{-\lambda u}(1 - e^{-\lambda u})^{n-1}, \quad F(v) = (e^{-\lambda v})^n, \quad f(v) = n\lambda(e^{-\lambda v})^{n-1}$$

(iii) 自明すぎる気がするのでパス。

9. パス

8 大数の法則と中心極限定理

8.1 同時確率分布と周辺確率分布

1. n が大きいので、 $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ は近似的に正規分布に従う。

すなわち、 $N(280, 168)$ に従う。 $(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$ の期待値・分散はそれぞれ $700 \times 0.4 = 280$ 、 $700 \times 0.4 \times (1-0.4) = 168$

よって、

$$(\text{左辺}) = P\left(\frac{L-280}{\sqrt{168}} \leq z \leq \frac{U-280}{\sqrt{168}} = 0.95\right) \quad (z \text{ は標準化変数})$$

したがって、

$$Q\left(\frac{U-280}{\sqrt{168}}\right) = Q\left(-\frac{L-280}{\sqrt{168}}\right) = 0.025$$

であれば条件を満たす。

正規分布表から、 $0.025 = Q(1.960)$

よって、

$$\frac{U-280}{\sqrt{168}} = -\frac{L-280}{\sqrt{168}} = 1.960$$

から、

$$\mathbf{L = 254.6, U = 305.4}$$

2. (ii) はパス

(i)

$$E(S_n) = 1 \times np + (-1) \times nq = n(2p-1)$$

$$V(S_n) = n\{E(X_i^2) - (E(X_i))^2\} = 4np(1-p) = 4npq$$

さらに、中心極限定理から、 S_n は $\mathbf{N(n(2p-1), 4npq)}$ にしたがう。

3. 各 X_i が二項分布 $\text{Bi}(1, 0.28)$ に従う。よって、 $X_1 + X_2 + \cdots + X_{450}$ は中心極限定理から $N(450 \times 0.28, 450 \times 0.28 \times (1 - 0.28)) = N(126, 90.72)$ に従う。

よって、3割バッターになる確率は、

$$P(X_1 + X_2 + \cdots + X_{450} \geq 450 \times 0.3 = 135) = P\left(z \geq \frac{135 - 126}{\sqrt{90.72}} \simeq 0.94\right) \simeq 0.74$$

また、 $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ は $N(0.28n, 0.28 \times 0.72 \times n) = N(0.28n, 0.2016n)$ に従う。

打数 n とすると、確率 0.2 で 3割バッターになるには、

$$P(X_1 + X_2 + \cdots + X_n \geq 0.3n) = P\left(z \geq \frac{0.3n - 0.28n}{\sqrt{0.2016n}}\right) \geq 0.2 \simeq Q(0.84)$$

よって、 $\frac{0.3n - 0.28n}{\sqrt{0.2016n}} < 0.84$ から、 $n < 355.622 \cdots$ よって、 **$n < 355$**

9 標本分布

- 順に、母平均の代用品としての役割。標本分散の期待値が母分散になる。
- がんばって計算しましょう。結果は、 $\bar{X} = 1.21$, $s^2 = 1.10 \times 10^{-3}$

$$\left(\text{ただし、} s^2 = \frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{5} \right)$$

- パス。巻末の解答によると、 s^2 の方が S^2 よりも σ^2 に近くなるらしい。

4.

$$\begin{aligned} \sum (X_i - \bar{X})^2 &= \sum (X_i - \mu) - (\bar{X} - \mu)^2 \\ &= \sum (X_i - \mu)^2 - 2(\bar{X} - \mu) \sum (X_i - \mu) + n(\bar{X} - \mu)^2 \\ &= \sum (X_i - \mu)^2 - n(\bar{X} - \mu)^2 \end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned} E(s^2) &= \frac{1}{n-1} E\left(\sum (X_i - \bar{X})^2\right) \\ &= \frac{1}{n-1} \left\{ E\left(\sum (X_i - \mu)^2\right) - nE(\bar{X} - \mu)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{n-1} \left\{ n\sigma^2 - n\frac{\sigma^2}{n} \right\} = \sigma^2 \end{aligned}$$

- 関数電卓で計算するのが得策です。(e の 9.7 乗とかでてくるので手計算は無謀かもしれない。) 一応計算式だけ示しておきます。

(i) $n\lambda_1 =$ (表の、各県の交通事故死亡者数) として、

$$\sum_{x=0}^9 \frac{e^{-n\lambda_1} (n\lambda_1)^x}{x!}$$

標本	$\bar{X}$	s^2
171.0,167.3,170.6	169.63	4.12
171.0,167.3,178.7	172.33	33.82
171.0,167.3,162.3	166.87	19.06
171.0,170.6,178.7	173.47	20.85
171.0,170.6,162.3	167.97	24.12
171.0,178.7,162.3	170.67	67.32
167.3,170.6,178.7	172.20	34.41
167.3,170.6,162.3	166.73	17.45
167.3,178.7,162.3	169.43	70.65
170.6,178.7,162.3	170.53	67.24

(ii) $n\lambda_2 = (\text{表の、各県の交通事故死傷者数})/365$ として、

$$\sum_{x=0}^4 \frac{e^{-n\lambda_2} (n\lambda_2)^x}{x!}$$

答えは巻末にのってるのでそれを見てね。^{*2}

6. 少々計算が面倒ですが頑張りましょう。

(i)

$$\frac{171.0 + 167.3 + 170.6 + 178.7 + 162.3}{5} = 169.98$$

(ii) 上図参照。

(iii) $E(\bar{X}) = 169.98, V(\bar{X}) = 4.81, \frac{5-3}{5-1} \frac{\sigma^2}{3} = 4.79$ よって、概ね一致する。
(多少値が違うのは誤差の範囲内だと思い込みましょう。)

7. 乱数表でランダムに決めた位置から 4 ケタの数の並びを、重複生起を飛ばしながら順次取り出し、1 0 0 0 を超える数は除く。5 0 0 0 の時も同様。^{*3}

10 正規分布からの標本

1. 物体の測定値 X は $N(100, 0.1)$ に従う。

よって、10 回分の測定値の平均 $\bar{X}$ は $N(100, 0.1/10)$ すなわち $N(100, 0.01)$ に従う。

また、 $\bar{Y} = |\bar{X} - \mu|$ とおくと、 $\bar{Y}$ は $N(0, 0.01)$ に従うから、

$$P(|\bar{Y}| > 0.3) = P(|Z| > \frac{0.3}{\sqrt{0.01}}) = P(|Z| > 3) = 2P(Z > 3) = 2 \times 0.0013499 \simeq \mathbf{0.0027}$$

^{*2} いわゆる手抜きですが、教育的配慮だということも可能らしい

^{*3} 巻末の解答丸写し。

(ただし、 Z は (この場合は $\bar{Y}$ の) 標準化変数とする。以下同じ)

2. 同様に、 $\bar{Y} = |\bar{X} - \mu|$ とおくと、 $\bar{Y}$ は $N(0, 0.1/n)$ に従うから、

$$P(|\bar{Y}| < 0.1) = P(|Z| > \frac{0.1}{\sqrt{0.1/n}}) = P(|Z| > 0.1\sqrt{10n}) = 1 - 2P(Z \geq 0.1\sqrt{10n}) \geq 0.9$$

よって、 $P(Z \geq 0.1\sqrt{10n}) \leq 0.05$ 。

また $P(Z \geq 0.1\sqrt{10n}) = Q(0.1\sqrt{10n})$ より、

$$Q(0.1\sqrt{10n}) \leq 0.05$$

$$0.1\sqrt{10n} \geq 1.645 \text{ (正規分布表より)}$$

$$n \geq 27.06025$$

n は整数なので、答えは、 **$n \geq 28$**

3. (i)

$$\begin{aligned} P(3 \leq X \leq 6) &= P\left(\frac{3-4}{\sqrt{15}} \leq Z \leq \frac{6-4}{\sqrt{15}}\right) \\ &= P\left(-\sqrt{\frac{2}{3}} \leq Z \leq 2\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \\ &= Q\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right) - Q\left(2\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \\ &\simeq 1 - Q(0.817) - Q(1.633) \\ &\simeq \mathbf{0.742} \end{aligned}$$

(ii) χ^2 分布を使います。

$$\begin{aligned} P(s^2 \geq a) &= P\left((n-1)\frac{s^2}{\sigma^2} \geq a\frac{n-1}{\sigma^2}\right) \\ &= P\left(\chi^2 \geq \frac{9}{15}a\right) \geq 0.01 \end{aligned}$$

(ただし、 χ^2 は $\chi^2(9)$ に従う確率変数)

したがって、 $\frac{3}{5}a = \chi_{0.05}^2(9)$ 。また、 $\chi_{0.05}^2(9) = 16.9190$ なので (巻末の表より)、

$$a = \frac{5}{3} \times 16.9190 \simeq \mathbf{28.20}$$

4. t 分布を使います。

$$P\left(\frac{\bar{X}-3}{s} > a\right) = P\left(\sqrt{15}\frac{\bar{X}-3}{s} > \sqrt{15}a\right)$$

ここで、 $t = \sqrt{15}\frac{\bar{X}-3}{s}$ とすると、 t は $t(14)$ に従う。よって、上式と条件から、

$$P\left(\frac{\bar{X}-3}{s} > a\right) = P(t > \sqrt{15}a) = 0.01$$

ここから、 $\sqrt{15}a = t_{0.01}(14)$ がわかる。よって答えは、

$$a = \frac{t_{0.01}(14)}{\sqrt{15}} = \frac{2.624}{\sqrt{15}} \simeq \mathbf{0.678}$$

5. それぞれの標本平均を $\bar{X}, \bar{Y}$ とおく。このとき、 $\bar{X}$ は $N(2, 3/10)$ に従い、 $\bar{Y}$ は $N(5, 4/8)$ に従う。
よって、 $\bar{X} - \bar{Y}$ は、 $N(2-5, 3/10+4/8)$ 、つまり $\mathbf{N(-3, 0.8)}$ に従う。

6. F 分布を使います。

$$P\left(\frac{s_1^2}{s_2^2} > c\right) = P\left(\frac{\sigma_2^2 s_1^2}{\sigma_1^2 s_2^2} > \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} c\right) = P\left(\frac{4 s_1^2}{3 s_2^2} > \frac{4}{3} c\right) = 0.05$$

$\frac{4}{3} \frac{s_1^2}{s_2^2}$ は $F(9, 7)$ に従うので、 $\frac{4}{3}c = F_{0.05}(9, 7)$ 。

よって、答えは、

$$c = \frac{3}{4} F_{0.05}(9, 7) = \frac{3}{4} \times 3.677 \dots \simeq \mathbf{2.76}$$

7. (iii)(v) は答えが合わないのでとりあえず保留。分かり次第載せます。

- (i) 確率変数 X が $N(\mu, \sigma^2)$ に従うとする。このとき、 $\bar{X}$ は $N(\mu, \sigma^2/10)$ に従う。したがって、

$$\begin{aligned} P\left(|\bar{X} - \mu| \geq 0.8\sqrt{\frac{\sigma^2}{10}}\right) &= P\left(|Z| \geq \frac{0.8\sqrt{\frac{\sigma^2}{10}}}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{10}}}\right) \\ &= P(|Z| \geq 0.8) \\ &= 2P(Z \geq 0.8) \\ &= 2 \times Q(0.8) \\ &= 2 \times 0.21186 \\ &= 0.42372 \\ &\simeq \mathbf{0.42} \end{aligned}$$

(ii) (i) と同じようにして、

$$\begin{aligned}
 P\left(|\bar{X} - \mu| \geq 0.8\sqrt{\frac{s^2}{10}}\right) &= P(|t| \geq 0.8) \quad (\text{ただし、} t \text{ は } t(9) \text{ に従う}) \\
 &= 2P(t \geq 0.8) \\
 &= 2 \times \frac{0.250 \times (0.883 - 0.8) + 0.200 \times (0.8 - 0.703)}{0.883 - 0.703} \\
 &\simeq \mathbf{0.45}
 \end{aligned}$$

(iv) 2つの標本平均をそれぞれ $\bar{X}, \bar{Y}$ 、標本標準偏差を s とおく。

これらの標本の大きさはどちらも 10 で、母平均・母分散は等しいので、 $\bar{X} - \bar{Y}$ の母平均は $\mu - \mu = 0$ 。したがって、

$$\begin{aligned}
 P(|\bar{X} - \bar{Y}| \geq 3s) &= P\left(\frac{|\bar{X} - \bar{Y}|}{s\sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{10}}} \geq \frac{3s}{s\sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{10}}}\right) \\
 &= P(|t| \geq 3\sqrt{5}) \quad (\text{ただし、} t \text{ は } t(18) \text{ に従う}) \\
 &= 2P(t \geq 6.70 \dots) \\
 &\simeq \mathbf{0}
 \end{aligned}$$

8. まず、 $\rho = 0.6$ を z 変換すると、 $\eta \simeq 0.6931$ 。

また、 r を z 変換して得られる変数を z とすると、 z は $N(\eta, 1/12)$ に従う。

よって条件を満たすには、とりあえず $P(-Z_{0.05} < \sqrt{12}(z - \eta) < Z_{0.05})$ となればよい。

不等式内を z について解いて、 $\eta \simeq 0.6931$ を代入すると、

$$0.6931 - \frac{Z_{0.05}}{\sqrt{12}} < z < 0.6931 + \frac{Z_{0.05}}{\sqrt{12}}$$

また、

$$z = \frac{1}{2} \log \frac{1+r}{1-r}$$

を上式に代入して、

$$0.6931 - \frac{Z_{0.05}}{\sqrt{12}} < \frac{1}{2} \log \frac{1+r}{1-r} < 0.6931 + \frac{Z_{0.05}}{\sqrt{12}}$$

さらに、 $Z_{0.05} = 1.960$ より、上式に代入して

$$0.12730 < \frac{1}{2} \log \frac{1+r}{1-r} < 1.23890$$

r について解くと

$$\frac{\exp(0.25460) - 1}{\exp(0.25460) + 1} < r < \frac{\exp(2.51780) - 1}{\exp(2.51780) + 1}$$

$$\mathbf{0.127 < r < 0.851}$$

9. (i) は省略。(ii) 巻末の表に載っています。数字ばかりで萎えますが、なんとか頑張って表を読み解くと、

$$Z_{0.025} = 1.960, \quad \chi^2(1) = 3.84146, \quad t_{0.025}(120) = 1.980$$

$$F_a(1, 120) = 3.92, \quad t_a(k) = 1.658, \quad Z_{0.05}(k \geq 120)^{*4} \simeq 1.645$$

11 推定

1. 尤度関数^{*5}は、

$$L(\mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^n \lambda e^{-\lambda X_i}$$

よって、両辺をログすると、

$$\log L(\mu, \sigma^2) = \sum_{i=1}^n (\log \lambda - \lambda X_i) = n \log \lambda - n \lambda \bar{X}$$

両辺を λ で偏微分して、イコール 0 とすると、

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \log L(\mu, \sigma^2) = \frac{n}{\lambda} - n \bar{X} = 0$$

よって、 λ の推定量は、

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{X}}$$

2. もとめる μ の推定量を $\hat{\mu}$ とすると、まず、(i) より、 $\hat{\mu}$ は、実数 a, b を用いて、

$$\hat{\mu} = aX_1 + bX_2$$

とおける。また、 X_1, X_2 の期待値はどちらも μ 。

つぎに (ii) より、 $\hat{\mu}$ の期待値は μ であるので、

$$E(\hat{\mu}) = E(aX_1 + bX_2) = (a + b)\mu = \mu$$

したがって、 $a + b = 1$ 。

よって、 $\hat{\mu}$ の分散は、

$$V(\hat{\mu}) = a^2 V(X_1) + b^2 V(X_2) = a^2 V(X_1) + (1 - a)^2 V(X_2) = \sigma^2 \left\{ 2\left(a - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \right\}$$

したがって、分散が最小の時、 $a = 1/2$ 。

よって、求める答えは、

$$\hat{\mu} = \frac{1}{2} \mathbf{X}_1 + \frac{1}{2} \mathbf{X}_2$$

3. 与えられたデータから、 $\bar{X} = 9.72, s = 1.92$ 。また、 $t_{0.025}(18) = 2.101$ 。

これらを、正規母集団における信頼区間の式

$$[\bar{X} - Z_{\alpha/2} \sigma / \sqrt{n}, \bar{X} + Z_{\alpha/2} \sigma / \sqrt{n}]$$

に代入すると

$$[7.33, 12.11]$$

^{*4} k の値が大きいのので正規分布として扱う。

^{*5} 「ゆうどかんすう」と読む、ハズ。

4. いま、正規母集団での信頼区間の幅は、 $2(Z_{0.005} \times 3/\sqrt{n})$ とかける。

これが1以下であればよいので、 $6Z_{0.005}/\sqrt{n} \leq 1$ 。

よって、 n について解いて、

$$n \geq 36(Z_{0.005})^2 = 36 \times \left(\frac{2.57 \times (0.005 - 0.00494) + 2.58 \times (0.0050849 - 0.005)}{0.0050849 - 0.00494} \right)^2 = 238.86 \dots$$

よって、 **n は 239 以上にすべき**

5. 投葉群、対照群の標本平均をそれぞれ $\bar{X}, \bar{Y}$ とおく。

$$\bar{X} - \bar{Y} = -0.226$$

分散はどちらの群でも等しいと考えてよく、合併した分散を s^2 とすると、

$$s^2 = \frac{1}{18} \left(\sum_{i=1}^{10} (X_i - \bar{X})^2 + \sum_{i=1}^{10} (Y_i - \bar{Y})^2 \right)$$

よって

$$s \simeq 0.230$$

また、

$$t_{0.025}(18) = 2.101$$

よって、求める信頼区間は、

$$\left[\bar{X} - \bar{Y} - t_{0.025}(18)s\sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{10}}, \bar{X} - \bar{Y} + t_{0.025}(18)s\sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{10}} \right] = [-0.442, -0.010]$$

6. 標準法・簡便法の標本平均をそれぞれ $\bar{X}, \bar{Y}$ とおくと、 $\bar{X} - \bar{Y} = 4$ 。

また、標準法・簡便法の標本分散をそれぞれ s_1^2, s_2^2 とすると、 $s_1^2 \simeq 0.67, s_2^2 \simeq 17.71$ 。

よって、この2つの標本の母分散が等しいというには無理がある。そこで、ウィルチの近似法を用いる。

ここで、

$$\nu = \frac{\left(\frac{s_1^2}{4} + \frac{s_2^2}{8} \right)^2}{\frac{(s_1^2/4)^2}{3} + \frac{(s_2^2/8)^2}{7}} = 0.813163 \dots$$

に最も近い整数は8なので、 $\nu^* = 8$ とかける。

さらに、 $t_{0.025}(8) = 2.306$ 。

以上を

$$\left[\bar{X} - \bar{Y} - t_{0.025}(8)\sqrt{\frac{s_1^2}{4} + \frac{s_2^2}{8}}, \bar{X} - \bar{Y} + t_{0.025}(8)\sqrt{\frac{s_1^2}{4} + \frac{s_2^2}{8}} \right]$$

に代入して、答えは、

$$[0.44, 7.562]$$

7. (i) この標本の、標本平均・標本分散を、それぞれ $\bar{X}, s_1^2$ とおく。

$$\bar{X} = 24.21, \quad s_1^2 = 1.931, \quad \text{よって、} s_1 = 1.39$$

また、標本大きさ $m=10$ で、 $t_{0.005}(9) = 3.250$

よって信頼区間は、以上の値を

$$[\bar{X} - t_{0.005}(9)s_1/\sqrt{m}, \bar{X} + t_{0.005}(9)s_1/\sqrt{m}]$$

に代入して、

$$[22.78, 25.64]$$

- (ii)

$$\chi_{0.005}^2(9) = 19.0228, \quad \chi_{0.975}^2(9) = 2.70039$$

また、求める信頼区間は、

$$\left[\frac{9s_1^2}{\chi_{0.005}^2(9)}, \frac{9s_1^2}{\chi_{0.975}^2(9)} \right]$$

値を代入して、

$$[0.92, 6.46]$$

- (iii) 大阪における標本の、標本平均 $\bar{Y}$ とおく。

$$\bar{Y} = 24.48$$

また、X,Y を合併した分散を s とすると、

$$s^2 = \frac{1}{18} \left\{ \sum_{i=1}^{10} (X_i - \bar{X})^2 + \sum_{i=1}^{10} (Y_i - \bar{Y})^2 \right\} = 1.52 \quad \text{よって } s =$$

さらに、 $t_{0.025}(18) = 2.101$ これらを

$$\left[\bar{X} - \bar{Y} - t_{0.025}(18)s\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}, \bar{X} - \bar{Y} + t_{0.025}(18)s\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}} \right]$$

値を代入して、

$$[-1.43, 0.89]$$

- 8.

$$\hat{p} = \frac{27}{50} = 0.54, \quad Z_{0.025} = 1.960$$

これを、二項分布の信頼区間の式

$$\left[\hat{p} - Z_{0.025}\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/50}, \hat{p} + Z_{0.025}\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/50} \right]$$

に代入すると、答えは、

$$[0.40, 0.68]$$

9.

$$\hat{\lambda} = 4.8, \quad Z_{0.005} = \frac{2.057 \times (0.005 - 0.00494) + 2.057 \times (0.0050849 - 0.005)}{0.0050849 - 0.00494} = 2.5754$$

これを、ポアソン分布の信頼区間の式

$$[\hat{\lambda} - Z_{0.005}\sqrt{\hat{\lambda}/n}, \hat{\lambda} + Z_{0.005}\sqrt{\hat{\lambda}/n}]$$

に代入して、答えは、

$$[3.02, 6, 58]$$