

7・確率

確率いきます。基本的なことはみんな高校でならったとおもうので省きます。高校でやってない可能性もある条件付確率からいきますね。

条件付き確率

袋に白、黒3つずつの玉をいれます。白の3つにはそれぞれ1、1、2の数字が書いてあり、黒の3つにはそれぞれ1、2、2の数字が書いてあります。この袋から1個だけ取り、数字が1か2かをあてる賭けをカイジが行ったとします。

まあカイジは狡猾なので、引く瞬間に玉が白だということを確認しました。このときカイジはどっちに掛けるのが適当でしょうか？色がわからない状態では、1、2である確率はそれぞれ1/2でしたが、玉が白だとわかると、1の確率2/3、2の確率1/3となり、1にかけたほうがいいことがわかります。ざわ・・・ざわ・・・

このように、他の事象Bが起こったとわかっている場合に事象Aが起こる確率を、

「Bを条件とするAの条件付き確率」といい、 $P(A|B)$ と表します。

また、次のような関係があります。 $P(A|B) = P(A \cap B) / P(B)$

上の例でやってみると、 $P(1|白) = P(1 \cap 白) / P(白) = \frac{1/3}{1/2} = 2/3$ となります。

ジャスト2/3、条件付き確率に狂いなし。

また、上の関係式から導かれる次の関係式を乗法定理といいます。

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

また、事象Aの起こる確率が他の事象Bに影響されないとき、すなわち

$P(A|B)=P(A)$ のとき、この事象は「独立」とであるといいます。

次にベイズの定理を説明します。

Aを得られた結果、 $H_1 H_2 \dots H_k$ を原因といたします。

このとき、 $P(H_i)$ を事前確率（ある原因が起こる確率）、 $P(H_i|A)$ を事後確率（Aという結果が起こったときに、その原因が H_i である確率）とすると次のような関係式があります。

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A|H_i)}{\sum P(H_j) \cdot P(A|H_j)}$$
 です。一見難しいですが上にあげた定義に

従ってみていくとそうでもありません。証明は教科書84Pに書いてあり、比較的わかりやすいものです。気になる人はご覧ください。ここでは省略します。急にボールが来たもので・・・すいません。

8. 確率変数

確率変数 (random variable 以下 r.v と略すこともあるので注意。確率変数はXのように

大文字を使って表す。)とは、それが取る各値に対しそれぞれ確率が与えられている変数のことを言います。たとえばサイコロの目 X は確率変数といえます。1 から 6 までそれぞれ $1/6$ という確率が与えられていますね。コインの表、裏じたいは確率変数ではないですが、表に 0 裏に 1 という数字を割り当てればそれは立派な確率変数になります。それぞれ $1/2$ という確率が与えられています。

確率変数には二つの種類があります。一つは**離散型確率変数**です。これはサイコロの目のようにとびとびの値しかとらないものです。おもに整数っていいかもです。高校でやったのはこのタイプだけでしたね。簡単に言えば、サイコロは 3. 2 とか 2. 5 3 3 とかの値はとらないでしょ? ってことでござるよケンイチくん。

離散型でそれぞれの確率 $P(X = x_k) = f(x_k)$ を X の確率分布といいます。

後で確率分布の例をあげていきますが、二項分布、ポアソン分布、超幾何分布などはこの離散型の確率分布の例です。

もう一つは**連続型確率変数**です。これは実数直線上の連続的な値をとるものです。

身長なんかは 172.3cm といわれるかも知んですが、実際は 172.3893720483...cm と無限に続くわけで。こういう場合連続型といえます。身長 50m とかの人はいないじゃないかと思うかもしれませんが(無表情な 3 分しか働けないおじ様はのぞいて)、その確率を 0 にすればいいわけです。

連続型の確率分布の定義は以下のものです。

$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$ です。このとき関数 $f(x)$ を確率変数 X の**確率密度関数**とい

います。ちなみに $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ です。なんとなくイメージわきますよね。

イメージしにくいひとは図が教科書に書いてあるので見てみてください。91 p です。

連続型では例えば $X=170$ である確率は 0 となります。定義が積分だからです。あくまで範囲で決まります。このへんが離散型と大きく違うところなんだよ明智くん。

累積分布関数

つてのがあります。「ある値以下の確率」を求めるときに使ったりします。このように確率変数 X に対して、 x を実数とすると x 以下の確率 $F(x) = P(X \leq x)$ を X の累積分布関数と

いいます。離散型だと $F(x) = \sum_{u \leq x} f(u)$ 連続型だと $F(x) = \int_{-\infty}^x f(u)du$ です。

期待値・分散

期待値と分散の話をします。期待値は高校でもやったのでつかみやすいと思います。サイコロの目の期待値は 3.5 です。この 3.5 はいわば確率変数 1・2・・・・・6 の重心ともいえますね。

離散型の期待値は $E(X) = \sum_x xf(x)$ 、連続型の期待値は $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$ です。

期待値は今後簡単のために μ (ミュー) と表すことが多いです。期待値には演算法則があります。 $[a]E(c) = c$ $[b]E(X+c) = E(X) + c$

$[c]E(cX) = cE(X)$ $[d]E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ (期待値の加法定理)

てなかんじです。

分散の話にいきます。(これは前あげた分散とちょっと違うらしいです。注意してケロ。

分散は期待値からの距離を基準としています。どれくらいばらついてるか、ですね。

分散は $V(X) = E\{(X-\mu)^2\}$ と表せます。

しかし実際はこうやって計算するわけではなく、便利な公式があります。

$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ これはめちゃくちゃ重要だって書いてあるので覚えてく

れヨォ・・・分散は σ^2 と表すことが多いようです。 $\sqrt{\sigma^2}$ のことを標準偏差といいます。

チェビシェフの不等式

おれの友達にチェビシェフっていうやつがいるんですが、そいつがこの間久しぶりに電話してきてこんなん見つけたぞ！って言ってきました。深夜2時に迷惑なやつです。

$P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$ だそうです。これを変形すると

$P(|X - \mu| \leq k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$ となるそうです。

教科書 105 P に例があるぞ！と言いつつは電話を切りました・・・

期待値と分散しかわかってないのにある範囲の確率がある程度わかるし、どんな確率変数にも成立する絶対的なものらしいです。テストに出るかどうかはわかりませんが覚えててくれると奴も浮かばれるとおもいます・・・まだ生きてますが。

いよいよ次から確率分布です。ヤマともいえるところにきました・・・ここまで読んで無理だと思ってる人、まだテスト前なんだから、精一杯やって、それから単位をとりなさい。まあおれも気持ちがくじけそうです。基礎統計は楽だってオリパンプに書いてあったのに・・・これは孔明の畏だったか・・・おなかすいたんでご飯食べます。

シーチキンと豆腐ウマス www うは www おk www 夢がひろがりんぐ www

9・確率分布

確率分布、行きます！ ということで確率分布の話です。

離散的確率分布

① 二項分布

おれがダーツを投げてブル（真ん中）に入る確率を $\frac{1}{3}$, 入らない確率を $\frac{2}{3}$ とすると、

10 回中 x 回ブルに入る確率は $f(x)=_{10}C_x\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{10-x}$ となりますね。(データは

今取りましたw30 本中 10 本入りました。まあまあです。)

こういう試行を一般化すると

$P(X=x)=f(x)=_nC_xp^x(1-p)^{n-x}$ となります。この確率分布を**二項分布**とい

います。(確率変数 X はある事象が起こる回数です)

このとき、**確率変数 X は二項分布に従う**といい、 **$X \sim \text{Bi}(n, p)$** と書きます。

このとき期待値、分散はそれぞれ **$E(X)=np$ $V(X)=np(1-p)$** となります。

② ポアソン分布

二項分布で n とか x とかが大きくなると計算が大変になります。 $n=10000000000$ とかやっつけられません。手が、手がああああ・・・ってなっちゃいます。

しかし大量の試行でなかなかおきない事象を起こそうとすることは往々にしてありますね。

(例・ポーカーのロイヤル・ストレート・フラッシュ、トキワの森の Lv5 のピカチュウ探し、パワプロのサクセスで最初からオールCの選手を出す、俺に彼女ができる等)

このように二項分布において $n \rightarrow \infty$ 、 $p \rightarrow 0$, $np \rightarrow \lambda$ となる極限では、次の近似が成立。

$P(X=x)=_nC_xp^x(1-p)^{n-x} \longrightarrow \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!}$ です。この確率分布を**ポアソ**

ン分布といいます。このとき、 **X はポアソン分布に従う**といい、 **$X \sim \text{Po}(\lambda)$** と書きます。

このとき期待値、分散はそれぞれ **$E(X)=np=\lambda$ $V(X)=np=\lambda$** となります。二項分布とそっくりですね。

例を一つ。ポーカー 1 ゲームでロイヤル・ストレート・フラッシュが成立する確率を仮に $p=0.0002$ とし、10000 回ポーカーをやっけてロイヤル・ストレート・フラッシュが 3 回出る確率を求めると $np=\lambda=2$, $x=3$ ですので

$f(3)=\frac{e^{-2} \cdot (2)^3}{3!}=0.180447$ となります。ポーカー知らない人はごめんなさい。

③ 幾何分布（待ち時間分布）

ダーツやってるとなかなかブル（真ん中）に入らないときがあります。何が悪いのか試行錯誤すると余計入らなくなるものです・・・入るまで投げ続けるぞ！と意地になって投げ続けて、30 投目にやっと入った！ってこともあります。最近はほとんどないですが、ね。このように試行の回数はあらかじめ決めないでおき、次々と続け、最初に成功するまでの試行回数を表す確率変数を X としたとき、 $X=x$ すなわち x 回目でようやく成功する確率

は $P(X=x)=f(x)=p(1-p)^{x-1}$ と表されます。大丈夫ですよ（^__^）

この確率分布を**幾何分布**と呼びます。幾何分布は離散的な**待ち時間分布**です。

このとき、 **X は幾何分布に従う**といい、 **$X \sim \text{Ge}(p)$** と書きます。

幾何分布の期待値、分散は次の通りです。

$$E(X) = \frac{1}{p} \quad V(X) = \frac{1-p}{p^2} \quad \text{期待値のほうはイメージわきますね。}$$

主な離散的確率分布は以上です。他にも負の二項分布、超幾何分布などがありますが、過去のシケプリなどをみたところ言及していないものが多かったです。きになるひとは教科書を見ておいてくださいね。出たらその時は・・・再就職だな。

だいぶ疲れてきましたががんばります。だって、おれこのシケプリ作り戦争が終わったら結婚するんだ・・・

連続的確率分布

① 正規分布

正規分布はもっとも代表的な連続型の確率分布です。こいつがわからないと仕様がありません。気合入れてやっていきましょう。

正規分布の密度関数は $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ であらわされます。こんなんの覚え

られるわけないので覚えなくていいです。教科書持込可なので。

このとき**確率変数 X は正規分布に従う**といい、 **$X \sim N(\mu, \sigma^2)$** と書きます。

正規分布の期待値は μ 、分散は σ^2 です。正規分布は期待値と分散を決めると一意的に決まります。

連続型の確率変数 X が正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うとき、 $aX + b$ は正規分布 $N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$ に従います。ここで、 $a = 1/\sigma$ 、 $b = -\mu/\sigma$ として確率変数 $Z = (X - \mu)/\sigma$ を定めると、 Z は

正規分布 $N(0, 1)$ に従います。こうしてできた期待値 0、分散 1 の正規分布を**標準正規分布**と言います。

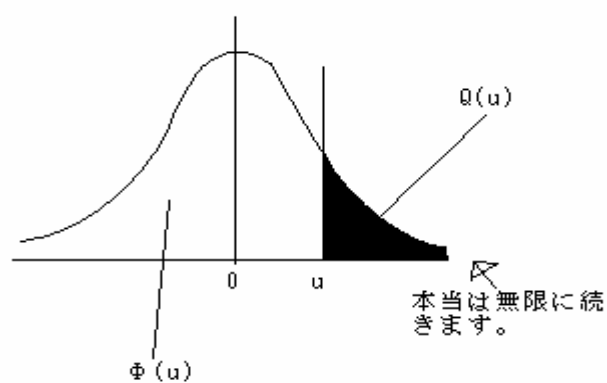
教科書 280p には標準正規分布表が載っていますね。こいつの見方を説明します。

ここに載っているのはすべて「上側確率」です。累積分布関数だと下側なんですが、ね。

この上側確率を $Q(u)$ と表してます。累世分布関数は $\Phi(u)$ と表します。

まあわかると思いますが $Q(u)=1-\Phi(u)$ です。だから上側がわかれば下側もわかります。

$$Q(u) = 1 - \Phi(u) = \int_u^{\infty} \phi(u) du \text{ です。}$$



関係しきとして大事なものがあります。 **$\Phi(-z)=1-\Phi(z)$** は大事。表にはプラスの値しか書いてありませんが、これで u がマイナスでもできますね。

例として、 $P(-1 \leq u \leq 2.23)$ を求めてみましょう。

表をみると、 $Q(1)=0.15866$ ですね。よって $Q(-1)=1-Q(1)=1-0.15866=0.84134$ です。

また $Q(2.23)=0.12874$ です。

$P(-1 \leq u \leq 2.23) = Q(-1) - Q(2.23) = 0.84134 - 0.12874 = 0.7126$ となります。おk？

さて、ここでの u っていうのはあくまで標準化した時の確率変数 $Z = (X - \mu)/\sigma$ の値であることに注意してください。例えばある 100000 人の団体が受けたテストの得点が正規分布に従い、平均（期待値）が 50 点、分散が 10^2 だったとし、得点 T として $50 \leq T \leq 51$ となる人数を求めたいとする。

すると

$$P(50 \leq T \leq 51) = P(0 \leq T - 50 \leq 1) = P(0 \leq T - 50 / 10 \leq 0.1)$$

$$= Q(0) - Q(0.1) = 0.50000 - 0.46017$$

$$= 0.03983$$

となります。ということは 100000 人受ければ大体 3983 人くらいこの範囲に入ってるだろう、ってことになります。

確率変数 T を標準化して、標準正規分布に従うようにする。これが上の変形です。

間違っても、教科書の表に 50 がない！ 51 がない！って言わないでください・・・おれはあ
わややるところでしたが、ねw

② 指数分布

故障率が一定のシステムの偶発的な故障までの待ち時間、つまり寿命だとか耐用年数とか
あるいは災害までの年数なんかもこいつに従うらしいです。

つまり、こいつも待ち時間分布の性質を持っています。

確率密度関数は

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda} \quad (x \geq 0) \quad , \quad 0 \quad (x < 0) \quad \text{となります。}$$

累積分布関数は

$$F(x) = P(X \leq x) = 1 - e^{-\lambda} \quad (x \geq 0) \quad , \quad 0 \quad (x < 0) \quad \text{です。}$$

期待値、分散については

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad V(X) = \frac{1}{\lambda^2} \quad \text{です。}$$

このとき**確率変数Xは指数分布に従う**といい、 **$X \sim \text{Ex}(\lambda)$** と書きます。

主なものは以上です。難しいですね・・・がんばっていきましょう。

と、思いましたが、いったんUPします。

7章からが微妙なんでね・・・もうやめたいです。でもあきらめたらそこで不可ですよ
ね安西先生・・・

10・多次元の確率分布

第7章にあたります・・・なんですが、第7章のどこが削られるのかがいまいちはっきり
しません。7. 2と7. 4が削られるという説が有力ではあるんですが。

ノートを見てみると7章に当たる分は半ページだけでした・・・なのでここは飛ばしちゃ
います。過去問を見たところここからの積極的な出題はないみたいです。後でこの知識
が必要な場合はその都度載せます。ただ、7章、多次元の確率分布はお読みください。

11・標本分布

第9章にあたり、9・4は省かれています。

これからは**統計的推測**の話をしていきます。よくクイズ番組で「東大生の正解率！」とかありま
すね。あれは別に東大生全員に聞いたわけではなくて、数十人の東大生を選んでその結果
をあたかも東大生全体の結果としてやっているわけです。この場合東大生が**母集団**、選ばれ
た数十人の東大生は**標本**といい、その選び方を**標本抽出**といいます

しかし標本の選び方によってはばらつきが当然生まれてしまいます。これに対応するた
めに出てくるのが**標本分布**です。

標本によって母集団を推定するのが目的なんですが、その手がかりとなるのが

母数（パラメータ）です。パラメータとしては

$$\mu = E(X) = \sum_x xf(x) \quad (\text{離散的}) \quad \mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \quad (\text{連続的})$$

であらわされる**母平均** μ や同じようにして**母分散** σ^2 などがあげられます。

母集団分布がわからなくても母平均や母分散がわかれば多くのことがわかります。

一方、大きさ n の標本 $X_1 X_2 \cdots X_n$ からとった

$$\text{標本平均 } \bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} \quad \text{や}$$

$$\text{標本分散 } s^2 = \frac{(X_1 - \bar{X})^2 + (X_2 - \bar{X})^2 + \cdots + (X_n - \bar{X})^2}{n-1}$$

など、標本を要約し、母集団の母数のいろいろな推測に使われるものを**統計量**といいます。

これら統計量の優れているのは次の関係式で母集団につながっているからだお（ $\hat{\omega}$ ）

$$E(\bar{X}) = \mu \qquad E(s^2) = \sigma^2 \qquad \text{この性質かなり大事です。おk?}$$

ここでちょっと。標本分散の分子が $n-1$ なのは为什么呢？むかしみた分散はたしか n だったはず。これはまあよくわかりませんが自由度が関係しているらしいです。

上に記した標本分散のことを**不偏分散**といいます。この不偏分散の $n-1$ を自由度といいます。「自由に動ける変数の数」という意味らしいです。

統計量は一般的に標本の関数 $t(X_1 X_2 \cdots X_n)$ で表せます。この統計量の確率分布をその統計量の**標本分布**といいます。この統計量の値の出方から母集団分布が求められます。

べ、べつにあんたのために母集団分布を求めるんじゃないんだからねっ・・・ξ///ξ

ところで、標本和 $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ や標本平均 $\bar{X}$ の具体的な標本分布は母集団分布に依存します。

二項母集団

母集団分布が母数 p のベルヌーイ分布ならば二項分布 $\text{Bi}(1, p)$ 、 $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ の分布は二項分布 $\text{Bi}(n, p)$ に従う。

ポアソン母集団

母集団分布が母数 λ のポアソン分布 $\text{Po}(\lambda)$ ならば、 $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ はポアソン分布 $\text{Po}(n\lambda)$ に従います。

正規母集団

母集団分布が母数 μ 、 σ^2 の正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ ならば、 $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ は

正規分布 $N(n\mu, n\sigma^2)$ に従い、 $\bar{X}$ は正規分布 $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ に従います。←これ大事ス www

眠いです・・今午前5時25分です。もう倒れそうです・・・でも大丈夫。おれが倒れてもきっとジェバンニが一人でやってくれますから・・・

12 正規分布からの標本

第10章に当たります。10.5と10.6は省かれています。

標本が正規母集団からとられているという過程は統計学の理論の中心です。このとき正規母集団からの標本に基づく統計量の標本分布を計算することが必要となるが、この計算を行うのが、**正規標本論**です。

分散が既知のときの標本平均の標本分布

上で $\bar{X}$ は正規分布 $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ に従うことを言いました。正規分布に従う以上標準化すること

ができます。この場合標準化変数 $Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従います。

つまり、 σ^2 さえわかっているならば $\bar{X}$ の標本分布は結局標準正規分布 $N(0, 1)$ を見ることに帰着します。

χ^2 分布（カイ2乗分布）

定義いきます。

$Z_1, Z_2, \dots, Z_k$ を独立な、かつ標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う確率変数とします。

今、 $\chi^2 = Z_1^2 + Z_2^2 + \dots + Z_k^2$ とすると、

確率変数 χ^2 が従う確率分布を**自由度kの χ^2 分布**といいます。いいわね？鉄郎・・・うん、メーテル。

χ^2 分布を用いると、正規母集団からの標本に基づく標本分散 s^2 の標本分布は次のようにまとめられます。

標本分散 $s^2 = \frac{(X_1 - \bar{X})^2 + (X_2 - \bar{X})^2 + \dots + (X_n - \bar{X})^2}{n-1}$ とするとき、

$\chi^2 \equiv (n-1) \frac{s^2}{\sigma^2}$ は自由度 (n-1) の χ^2 分布 $\chi^2(n-1)$ に従うといえる・・・じつちや

んの名にk（以下略）

χ^2 分布の上側確率のパーセント点の表が282、283ページにあります。

分散が未知のときの標本平均の標本分布

世の中うまくいかないものです。上で分散がわかっている時の話をしましたが、分散がわかっていることはあまり現実的じゃないです。

標本平均の標本分布の標準化 $Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ は分散 (σ^2) がわからないと計算できません。

そこで、少なくともわかる標本（不偏）分散 s^2 を代わりに使っちゃおう、っていうのが人情ってもんです。現実的ですね。

ここで定義されたのがスチューデントの **t 統計量** $t = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2 / n}}$ です。

これは既にもう標準正規分布には従いませんね。

いろいろ変形していくと

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2 / n}} \bigg/ \sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}} \bigg/ (n-1) \quad \text{という豪勢な式になります。これを死神の目でよくみる}$$

と・・・寿命がみえ r （以下略）気を取り直してよく見ると・・・

分子の $\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2 / n}}$ は標準正規分布 $N(0, 1)$ に、

分母にある $(n-1) \frac{s^2}{\sigma^2}$ は自由度 $(n-1)$ の χ^2 分布 $\chi^2 (n-1)$ に従います。t はこれらの比になっております。これらの組み合わせで t の密度関数が決まるので、正規標本論ではこれらを新たに **t 分布** と呼んでいます。定義はしたのとおりです。

t 分布 二つの確率変数 Y と Z が次の条件を満たすものとする。

- ① Z は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う。
- ② Y は自由度 k の χ^2 分布 $\chi^2 (n-1)$ に従う。
- ③ Z と Y は独立である。

今、確率変数 t を

$$t = \frac{Z}{\sqrt{Y / k}} \quad \text{と定義すると、t が従う確率分布を自由度 k の t 分布といいます。}$$

自由度 k の t-分布を $t(k)$ と表します。

これによると、さっき出てきた

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2 / n}} \quad \text{は自由度 } n-1 \text{ の t 分布 } t(n-1) \text{ に従います。}$$

また、 $\bar{X}$ の標準偏差 $\frac{s}{\sqrt{n}}$ を標本平均の**標準誤差**といいます。

10 章終わりました。いよいよあと二つ。がんばって生きたい・・・んですが、もう限界近い
です。ほんとに倒れそう・・・でも大丈夫・・・私が倒れてもかわり（まっすん）がいる
もの・・・

13 推定

第 11 章の内容です。ここからの内容は「統計理論の中心であり、頂点である」そうなので、
心していくんだよのび太くん・・・

ここは 11. 5. 2 と 11. 5. 3 を省くと聞きましたが・・・間違ってたらごめんなさい。
さて行きましょう。標本 $X_1X_2 \cdots X_n$ から求めた統計量を一般に**推定量**といいます。
それらから未知である母集団の母数（パラメータ）を**推定**するんです・・・どうです、な
んだかワクワクするでしょう???

大きく分けて推定の仕方には点推定と区間推定とがあります。

こ、これから頑張るのよっ・・・ってあんたのために言ってるんじゃないからね！§////§

点推定

母集団の未知の母数がある一つの値で推定する方法を点推定といいます。標本平均 $\bar{X}$ で母
平均 μ の推定をする、みたいなかんじです。そうなるとどんな統計量を推定量とするかが
大事ですね。そこでそいつをどうやって求めるのかについて話します。最尤法です。

最尤（さいゆう）とは「もっとももっともらしい」ということです。これから使うのは「最
尤原理」というもので、「現実の標本は確率最大のものが実現した」という仮定です。

ちょっと教科書にある例をあげてみませふ。（こっからは教科書に書いてあることです。教
科書を読みたい人はそちらをどうぞ！！）

1 になる確率が p , 0 になる確率が $1-p$ のベルヌーイ分布 $Bi(1, p)$ が母集団分布の場合を考え
ます。もちろん何を推定するかというと p ですね。

じゃあ 5 回くらいやってみましょう。すると・・・

$X_1=1, X_2=1, X_3=1, X_4=1, X_5=0$ とでました。まあ見た目たぶん $p=0.8$ だろうな、
と推定できますね。最尤原理より、↑の標本はある p において一番起きやすいものが起き
てるとします。このとき、この標本が得られる確率は

$L(p) = p^4(1-p)$ となりますよね。このとき $L(p)$ は p のいろいろな値でのもっともらし
さ（**尤度**）を表している関数とみなせます。そしてこの関数を**尤度関数**といいます。

最尤法とは尤度関数を最大にするものを推定値や推定量とする考え方です。おk？

尤度関数を最大にする値が最尤推定値、関数としてだと最尤推定量となります。

上に上げた例だと、 $\frac{dL(p)}{dp} = p^3(5-4p)$ なので $p=0.8$ が最尤推定値です。尤もですね。

一般に、大きさ n の標本で上の p のような未知の母数を θ とすると、尤度関数は
 $X_1X_2 \cdots X_n$ の同時確率分布を θ の関数とみなしたものとなり、 X_i の確率分布を

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta)$$
 $F(x, \theta)$ とすると、尤度関数は と掛け算になります。

これは母数がたくさん出てきたときでも同じです。

そこで、最尤推定量を出すときは、 $\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} = 0$ を計算するみたいです。

掛け算で出てきているのでいったん対数をとって和にして考える方法（**対数尤度**を考える方法）もあります。この辺正直自分も微妙なんでなんじゃらほいと思った人は教科書を読んでみてくださいね！教科書にいっぱい例が出てます。ぜひチェック。

あと点推定の基準とかがあります。複数推定量が出てきたときにどれにするのか決めないといけないときとかに使うみたいです。

不偏性

$\hat{\theta}$ を推定量、 θ を母数としたときに $E(\hat{\theta}) = \theta$ となる性質のことです。

標本平均はつねに母平均の不偏推定量です。 s^2 なんかももちろんそうですね。

他に標本の大きさ n が大きくなるに従い推定量が真の母数に近づく **一致性**、出来るだけ分散が小さいほうがいいという **有効性** なんかがありますです。

見た感じ区間推定のほうが大事みたいですな・・・こっちも気合入れましょう。

区間推定

見た感じ、出そうです。ここ。過去問にもいくつか・・・やってみましょう。

今までの点推定では母数 θ をある一つの値として推定してきましたが、今度は θ に対して確率の考え方をういてちょっと幅をつけて推定します。真の母数の値 θ が**ある区間（L、U）**に入る確率を $1 - \alpha$ （つまり、 α は θ が区間に入らない確率ですね。）以上になるように保証する方法です。L, U はそれぞれ**下側、上側信頼限界**といい、 $1 - \alpha$ を**信頼係数**といいます。そして区間 $[L, U]$ を $100(1 - \alpha)\%$ 信頼区間と呼びます。

$1 - \alpha$ は通常 0.99 や 0.95 などに設定されることが多いです。正規分布（時には t 分布）の場合でやってみます。226 ページにぐだぐだといろいろ書いてございます。これは一応読んでください。ただ、ここでは過去問や練習問題を用いてちょっくらやってみます。

2006. 2/7 廣松 試験問題

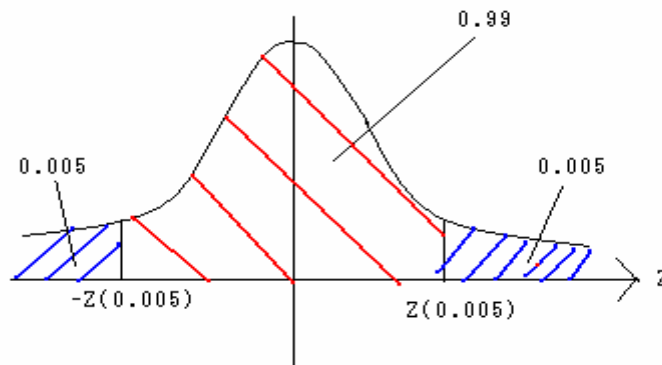
第 6 問 (1)

母平均 $= \mu$ 、母分散 $= 25$ の正規母集団について、次の問いに答えよ。

この母集団から大きさ n の標本を取り出して、母平均 μ を信頼水準 99% で区間推定したい。信頼区間の幅を 4 以内にするためには n の大きさをどのように取ればよいか。

正規母集団の問題ならおそらく後ろの表を使うはず。そうすると**標準化**が必須です。

標準化すると $Z = \frac{\bar{X} - \mu}{5/\sqrt{n}}$ ですね。さて、下の図を見てください。



連続型の確率密度関数だと確率は面積で表されるといいました。つまり、どこからどこまでだと面積が 0.99 になるのかを考えないといけません。そこで $Z_{0.005}$ を取りました。これは「こっから先の確率が 0.005 になる点」です。その対称点 $-Z_{0.005}$ は「こっから後の確率が 0.005 になる点」です。二つあわせて 0.01 ですね。つまり、この間にあれば確率は 0.99 なわけです。つまり、

$$-Z_{0.005} < Z = \frac{\bar{X} - \mu}{5/\sqrt{n}} < Z_{0.005} \quad \text{となればおkです。}$$

$Z_{0.005}$ を表で調べてみると・・・**2.58**が一番近いようです。こいつを使います。
上の不等式に $Z_{0.005} = 2.58$ を代入して整理すると・・・

$$\frac{-12.9}{\sqrt{n}} + \bar{X} < \mu < \frac{12.9}{\sqrt{n}} + \bar{X} \quad \text{となります。さて、問題は「幅が4以内」でした。}$$

つまり、 $\frac{25.8}{\sqrt{n}} < 4$ となればよいわけです。こいつを解くと $41.6 < n$ ですね

$42 \leq n$ となります。 おk？

じゃあ次は t 分布を使う例もやってみます。

問題

ある正規母集団から大きさ $n=5$ の標本

9.75 7.95 12.80 8.25 9.86 を得た。母平均 μ の信頼係数 95% の信頼区間を求めよ。

母分散がわからないので方針は t 分布ということになりますね。まず出すもん出しましょう。

$\bar{X} = 9.72, s = 1.92$ です。これは電卓を駆使してだしませふ。

さて、上と似たような感じです。今度は t 分布になっただけと思ってください。

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2 / n}} \text{ は自由度 } n-1 \text{ の } t \text{ 分布 } t(n-1) \text{ に従うことを考えると次の不等式がすぐ}$$

わかります。

$$-t_{0.025}(4) < \frac{9.72 - \mu}{1.92 / \sqrt{5}} < t_{0.025}(4) \text{ です。表より } t_{0.025}(4) = 2.776 \text{ ですから、後はせつせと計算}$$

して、 $7.33 < \mu < 12.11$ なので、95%信頼区間は $[7.33, 12.11]$ となります。

こんなかんじです。母分散の信頼区間なんかもあるみたいですね・・・これは χ^2 二乗分布を使うんでしょう。目を通しておくのも一興かと。

いよいよ次で最終しょうです。しっかり頑張りましょう。

14・仮説検定

ここもよく出題されています。しっかりがんばるのよ・・・鉄郎・・・うん、メー t（以下略）

例えば、サッカーで日本がブラジルに勝つ確率は 50%である、という**仮説**を立てたとします。じゃあやってみようということで 20 回試合をしたところ日本は 1 勝 19 負でした。

このとき、「日本がブラジルにサッカーで勝つ確率は 50%である」という仮説は支持できるでしょうか？**仮説が正しいと仮定して**確率を二項分布で計算するとおそらくとんでもなく低い確率になると思います。そうなるとほぼ「起こりえない」こととなり、この仮説は「**誤っている**」と判断せざるを得ません。このとき仮説は**棄却**されるといいます。

でも、一応確率は 0 でないわけです。例えば 10 パーセント以下は「起こりえない」と判断する人ならこの仮説は「誤っている」というでしょうが、0.000000000000・・・どこまで続くのやら・・・1 パーセント以下じゃないと「起こりえない」と判断しない心の広い人にとってはこの仮説は「正しい」ことになります。

このように、仮説に対してあらかじめどの程度の希少確率を考えるかにより、仮説が有意か否かがわかります。この基準の確率を**有意水準**といいます。

さて、日本がブラジルに勝つ確率について何か積極的な判断をしたいなら、「50%」である、と同時に「50%ではない」という仮説を立てておき、前者が棄却されたとき後者が採択されたとします。このときもとの仮説を**帰無仮説**、それと対立する仮説を**対立仮説**といいます。お互いはそれぞれ否定の関係にあり、それぞれ H_0, H_1 などと表します。

ちなみに帰無仮説を棄却するかしないかについては次の4つの場合があります。

① H_0 が真実で、 H_0 を棄却しない。(採択する)・・・正しい！

② H_0 が誤りである (H_1 正しい) のに、 H_0 を棄却しない。・・・誤り！

この誤りのことを**第二種の誤り**といたりします。品質管理に照らし合わせて**消費者のリスク**といたりもします。

③ H_0 が真実なのに、 H_0 を棄却する。・・・誤り！

この誤りのことを**第1種の誤り**といたりします。品質管理に照らし合わせて**生産者のリスク**といたりもします。

④ H_0 が誤りで、 H_0 を棄却する。・・・正しい！

母平均に関する検定

こちらにも実際に問題を解いていく形で説明します。

検定には二種類あって**両側検定**、**片側検定**とあります。片側検定には**左片側検定**、**右片側対立検定**とあります。

両側検定の帰無仮説、対立仮説は $H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu \neq \mu_0$

左片側検定の帰無仮説、対立仮説は $H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu < \mu_0$

右片側検定の帰無仮説、対立仮説は $H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu > \mu_0$ です。

11章と同じように、分散が既知の場合は正規分布表を、未知の場合はt分布表を使用します。では問題いきましょー！いええー！！！！！！！！！！

問題

空調システムの作動状況を調べるために、設定温度を25度とし、7日間にわたって室内温度を測定したところ、次のような結果を得た。

24.2 25.3 26.2 25.7 24.4 25.1 25.6

このシステムが正しく働いているか堂かを5%の有意水準で検定する。

いきます。この場合、帰無仮説 $H_0 : \mu = 25.0$ を 両側対立仮説 $H_1 : \mu \neq 25.0$ に対して検定する。

今 $\bar{X} = 25.21, s = 0.715$ であるから、
仮定が正しいとすると

$$t = \frac{25.21 - 25.0}{0.715 / \sqrt{7}} = 0.777 \quad \text{である。ここで11章の図を思い出して欲しい。5%以下のゾ}$$

ーンにこの値が入っていなければ良いのである。この場合t分布なので

表を見ると $t_{0.025}(6) = 2.447$ である。 $-2.447 < 0.777 < 2.447$

なので上 2.5%、下 2.5% のどちらにも入らず間に入っているのでおk。

したがって、有意水準 5% で帰無仮説は棄却できない。

次は片側。

問題

英語の特別講義の効果を調べるため、10 名の受講者に対して講義の前後で英語の試験を行い、二つの試験の得点差を求めたところ、

-1 3 4 5 3 0 7 4 2 -2 の 10 の標本が得られた。

この講義の効果について調べる。得点差は正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うとし、
帰無仮説 $H_0: \mu = 0$ を 右方側対立仮説 $H_1: \mu > 0$ に対して有意水準 5% で検定する。

ここで $\bar{X} = 2.5, s = 2.8$ なので

$$t = \frac{2.5 - 0.0}{2.8 / \sqrt{10}} = 2.82 \quad \text{となる。上と同じようにやってみる。}$$

$t_{0.05}(9) = 1.833$ で $1.833 < 2.82$ であるから

有意水準 5% で H_0 は棄却される。すなわち H_1 が採択される。よって、この講義には効果が
あったと認められる。

こんな感じです。左側もおんなじです。

このあと χ^2 乗検定とかもあるんですが、過去問をみたところ出てないので省略します。出たらごめんなさい。不安な人は教科書を読んでおいてください。

シケプリは以上となります。長くてごめんなさい。公式だけを素直にまとめることもできたんですが、80% 自分の理解のためにやってたので許してください。ただよく読めば理解できるようなものにちゃんとなったと思います。

これを読んで理解したら、時間があれば過去問や練習問題にも目を通して問題が解けるようになってください。同じ問題が繰り返し出ていたりしますので・・・

理 I 15 組に答えつきの問題がありました。本とは書きちゃだめなんでしょうけど活用するのも手かもしれませんね。。基礎統計で皆さんが見事単位をとれますよう

お祈りしています・・・ May the unit be with you... by Hori-ken