理I9組 840173I 岡野雄紀

) 垂直方向の重力のポテンシャルは二つのおもりの位置エネルギーの和と等しいので

$$V(0,0)=0$$

とすると、$V(x_1, x_2)$ は、

$$V(x_1,x_2) = mg\left(l-\sqrt{l^2-x_1^2}\right) + mg\left(2l-\sqrt{l^2-x_1^2}-\sqrt{l^2-(x_2-x_1)^2}\right)$$

$$= mg\left(3l-2\sqrt{l^2-x_1^2}-\sqrt{l^2-(x_2-x_1)^2}\right)$$

従って

$$m\frac{d^2x_1}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial x_1} = mg\left(-\frac{2x_1}{\sqrt{l^2-x_1^2}}+\frac{(x_2-x_1)}{\sqrt{l^2-(x_2-x_1)^2}}\right) \simeq \frac{mg}{l}(-3x_1+x_2)$$

$$m\frac{d^2x_2}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial x_2} \simeq \frac{mg}{l}(x_1-x_2)$$

) 上問の式に

$$\begin{cases} x_1 = A\cos(\omega t+\phi) \\ x_2 = B\cos(\omega t+\phi) \end{cases}$$ を代入して整理すると、

$$-\omega^2\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix} = -\frac{g}{l}\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$$

右辺を移項して、行列式が0になる条件を求めると、

$$\left(\omega^2-3\frac{g}{l}\right)\left(\omega^2-\frac{g}{l}\right)-\left(\frac{g}{l}\right)^2=0$$

これを解くと、

$$\omega_1=\sqrt{(2+\sqrt{2})\frac{g}{l}}, \quad \omega_2=\sqrt{(2-\sqrt{2})\frac{g}{l}}$$

) $$-\omega^2 A = -\frac{g}{l}(3A-B)$$

$$\Longleftrightarrow \frac{B}{A} = -\frac{(\omega^2-3g/l)}{g/l}$$

これに ω_1, ω_2 を代入して、$\frac{B_1}{A_1}$, $\frac{B_2}{A_2}$ を求めると、

$$\frac{B_1}{A_1} = 1-\sqrt{2} \quad , \quad \frac{B_2}{A_2} = 1+\sqrt{2}$$

って基準座標は

$$\begin{cases} X = (1+\sqrt{2})x_1 - x_2 \\ Y = -(1-\sqrt{2})x_1 + x_2 \end{cases}$$

般解は

$$\begin{cases} x_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ x_2(t) = B_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + B_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{cases}$$

して得られる。与えられた4つの条件は、

$$\begin{cases} \Delta = A_1 \cos\phi_1 + A_2 \cos\phi_2 \\ 0 = -A_1\omega_1 \sin\phi_1 - A_2\omega_2 \sin\phi_2 \\ 0 = B_1 \cos\phi_1 + B_2 \cos\phi_2 \\ 0 = -B_1\omega_1 \sin\phi_1 - B_2\omega_2 \sin\phi_2 \end{cases}$$

れを解くと、

$$\phi_1 = 0 ,\ \phi_2 = 0 ,\ A_1 = \frac{1}{4}(2+\sqrt{2})\Delta ,\ A_2 = \frac{1}{4}(2-\sqrt{2})\Delta$$

$$\begin{cases} M\dfrac{d^2x_1}{dt^2} = k(x_2 - x_1) \\ m\dfrac{d^2x_2}{dt^2} = -k(x_2 - x_1) + k(x_3 - x_2) = k(x_1 - 2x_2 + x_3) \\ M\dfrac{d^2x_3}{dt^2} = -k(x_3 - x_2) \end{cases}$$

$= x_2 = x_3$ のときは振動ではなく、等速直線運動である。

$$\begin{cases} x_1 = A\cos(\omega t+\phi) \\ x_2 = B\cos(\omega t+\phi) \\ x_3 = C\cos(\omega t+\phi) \end{cases}$$

を上問の式に代入し整理すると、

$$-\omega^2\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{k}{M} & \frac{k}{M} & 0 \\ \frac{k}{m} & -\frac{2k}{m} & \frac{k}{m} \\ 0 & \frac{k}{M} & -\frac{k}{M} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$$

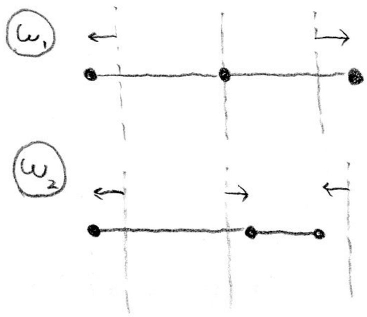
右辺を移項して、行列式が0になる条件を求めると、（ただし、$\omega \neq 0$）

$$\left(-\omega^2+\frac{k}{M}\right)\left(-\omega^2+\frac{2k}{m}\right)\left(-\omega^2+\frac{k}{M}\right)-\frac{k}{m}\cdot\frac{k}{M}\cdot\frac{k}{M}\cdot 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -\omega^6+2\left(\frac{k}{M}+\frac{2k}{m}\right)\omega^4-\left(\frac{4k^2}{Mm}+\frac{k^2}{M^2}\right)\omega^2=0$$

これを解くと、

$$\omega_1=\sqrt{\frac{k}{M}},\quad \omega_2=\sqrt{\frac{k}{M}+\frac{4k}{m}}$$



基準座標は ω_1 を考えると、x_2 が静止しているモード

ω_2 を考えると、x_1, x_3 の変位が等しいモードであるので、

$$\begin{cases} X_1 = -x_1 + x_3 \\ X_2 = x_1 - \frac{4M}{m}x_2 + x_3 \end{cases}$$

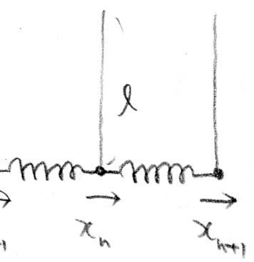
補足

ω_1 のとき、

$B_1 = 0,\quad \frac{A_1}{C_1} = -1$

ω_2 のとき、

$\frac{B_2}{A_2} = \frac{B_2}{C_2} = -\frac{4M}{m}$



重力とバネの力をあわせて考えると、

$$m\frac{d^2x_n}{dt^2} = -\frac{mg}{l}x_n - k(x_n - x_{n-1}) + k(x_{n+1}-x_n)$$

問題の式は $x_0(t)=0$、$x_{N+1}(t)=0$ で成り立つので、

$$\begin{cases} 0 = A\sin\phi\cos(\omega t+\delta) \\ 0 = A\sin((N+1)p+\phi)\cos(\omega t+\delta) \end{cases}$$

一式から $\phi=0$。従って第二式から $p=\frac{\nu\pi}{N+1}$ $(\nu=1,2,3,\cdots,N)$

こ(1)で得られた式に代入すると、

$$-\omega^2 m\sin np = -\frac{mg}{l}\sin np - 2k\sin np + k(\sin(n-1)p + \sin(n+1)p)$$

$$\Longleftrightarrow \quad -\omega^2 m = -\frac{mg}{l} - 2k + 2k\cos p \qquad \therefore \omega = \sqrt{\frac{g}{l}+\frac{2k}{m}(1-\cos}$$

界条件から、

$$\begin{cases} \sin\phi = \sin(p+\phi) \\ \sin(Np+\phi) = \sin((N+1)p+\phi) \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{p}{2}+\phi\right)\sin\frac{p}{2} = 0 \\ \cos\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)p+\phi\right)\sin\frac{p}{2} = 0 \end{cases}$$

$\neq 2m\pi$ ($m\in\mathbb{Z}$ なぜなら任意の i, j について $x_i(t)=x_j(t)$ となるから))

$$\begin{cases} \frac{p}{2}+\phi = \frac{\pi}{2} \\ \left(N+\frac{1}{2}\right)p+\phi = a\pi+\frac{\pi}{2} \quad (a\in\mathbb{Z},\ a\geq 0) \end{cases}$$

2式より、

$$p = \frac{a\pi}{N} \quad (a=0,\cdots,N-1)$$

$$\phi = \left(1-\frac{a}{N}\right)\frac{\pi}{2}$$

また、$\omega=\sqrt{\frac{g}{l}+\frac{2k}{m}(1-\cos p)}$ が代入して整理すると分かる。