力学悪あがき用シケプリ

わかりそうなところは大胆にカットしたお

第1章　運動の記述

重要そうなとこを羅列してみる

・内積(外積も)は積の微分法が適用できる

d/dt(A・B)=dA/dt・B+A・dB/dt

(ちなみに　d/dt(A×B)=dA/dt×B+A×dB/dt)

• スカラー3 重積

2 つのベクトルのベクトル積ともう１つのベクトルとのスカラー積。次の式が成り立つ。

A · (B × C) = C · (A × B) = B · (C × A)

この値は、ベクトルA,B,C を3 辺とする平行6 面体の体積である。

• ベクトル3 重積

3 つのベクトルのベクトル積。次の式が成り立つ。

A × (B × C) = (A · C)B − (A · B)C

ベクトルB,C の作る平面上のベクトルとなる。

・二次元極座標



vとaはrを微分すれば出てくるので覚える必要はない

・極座標の単位ベクトル

er=cosθex + sinθey、eθ= −sinθex + cosθey

動径方向と角度方向に単位ベクトルを変換したとき(上のように導入)以下が成立

　・・・(#)

これは覚えてしまおう　この後ちょいちょい出てくる



2章　運動法則

2.2.2万有引力

ニュートンはケプラーの3法則から太陽と惑星の間に働く力の式を導いた

再現してみる

(ただし、技巧的な変形が多いので、ムリに覚えんでもいいかも)

まず、h=r2θ‘　とhを定義しておく。

このとき、dS/dt=(1/2)r2θ’=(1/2)h　(Sは面積　S=(1/2)r2θで微小時間においてはrは一定)

ケプラーの第二法則より面積速度一定なのでhは定数。

また、太陽を中心とする平面極座標を設定。

ケプラーの第一法則より、惑星は楕円軌道を運動する。

焦点間の距離を2eaとすると(aは長軸半径)

r+=2a

(教科書P30図17　Pからx軸に垂線を下ろして三平方)

楕円では焦点からの距離の和は長軸半径の2倍だったはず

1年前のはずなのにもはや覚えていないというね・・・

これを変形して　　(←だけ覚えたほうが手っ取り早いかも)

ただしl=(1－e2)a、eは離心率

ここで　r’=－leθ’(－sinθ)/(1+ecosθ)2=er2θ’sinθ/l=ehsinθ/l

よって　r’’=ehθ’cosθ/l

また、dh/dt=d/dt(r2θ’)=2rr’ θ’+r2θ’’=0(∵hは定数)

∴2r’ θ’+r2θ’’=0

(#)より、角度方向の加速度は0

動径方向の加速度は

(r’’－r’(θ’)2)= ehθ’cosθ/l－r θ’(h/r2)= ehθ’cosθ/l－ hθ’((1+ecosθ)/l)=－h2/lr2

よって惑星に働く力は　F=－mh2/lr2　(mは惑星の質量)

ここで、ケプラーの第三法則よりT2/a3は一定　短軸半径b(=a(1－e2)(1/2))とすると

T=πab/(dS/dt)=2πa2/h

よって　T2/a3=4π2a(1－e2)/h2=4π2l/h2：一定　より　h2/lは一定

ここで　h2/l=GM として　F=－GM m/r2　(Mは太陽の質量)

(作用反作用の法則より、Fは惑星の質量と太陽の質量に関して対称であるべきなので、Fがmに比例する以上はMにも比例するはずである。)

4章　いろいろな運動

4.4　減衰振動

ばねにつるした物質が振動する際に、速度に比例する粘性抵抗を受けるとする。

この抵抗の大きさを2mγvとすると　F=－kx－2mγv

k=mω2　より　mx’’+2mγx’+ mω2x=0　(第二項が0のときが単振動)

∴　x’’+2γx’+ ω2x=0

これは2階の斉次線形微分方程式である。

○よくわかる(?)微分方程式

f’’+af’+bf=0の形の微分方程式では、二次方程式　x2+ax+b=0を解く(特性方程式)

特性方程式の２つの解を、α、βとおく。このとき、一般解は、次の形で与えられる。（ただし、A,Bは定数）

実数α、βに対して、α≠βのとき、f(x)＝Aeαx＋Beβx

実数α、βに対して、α＝βのとき、f(x)＝Aeαx＋Bxeαx

虚数解α、β（＝m±ni）に対して、f(x)＝emx（Acosnx＋Bsinnx）…(♭)

今特性方程式は　x2+2γx+ ω2=0　　x=－γ±

ⅰ)γ＞ωのとき　x=Aexp((－γ+)t)+Bexp((－γ－)t)

ⅱ)γ=ωのとき　x=(A+Bt)exp(－ωt)

ⅲ)γ＜ωのとき　(♭)の()内をcosで合成して　x=Aexp(－γt)cos(t+α)

微小変位に達するのが一番早いのはγ=ωのときであり、これを臨界制動という。

第5章　運動座標系

5.3　回転座標系

z軸を回転軸とする、角速度ωの回転座標系を考える。

基準系での単位ベクトルを*ex,ey,ez*、回転系での単位ベクトルを*e’x,e’y,ez*とし、rを左のように定める。また、ω≡ω*ez*と角速度ベクトルを定義する。

このとき　*e’x*= (cosωt)*ex*+(sinωt)*ey、e’y*= (－sinωt)*ex*+(cosωt)*ey*　となり、



となる。すなわち、時間微分の効果は、ωを左から外積としてかけることに等しい。

以上より　v = v’+ω×r、a = a’+ 2ω×v’ +ω×(ω×r)　となり、

回転座標系での運動方程式　ma’=(F'=)F−2mω×v'−mω×(ω×r)　が導かれる。

ここで、第二項をコリオリ力、第三項を遠心力という。(どちらも慣性力の一種)

座標系が回転しているため、見かけ上、向きをゆがめる力が働き、これをコリオリ力という。

…って認識でいいんだろうか？

第6章　質点系

6.2　一般の質点系

質量、変位、速度がそれぞれmi、ri、viのn個の質点から成る系を考える。このとき

全質量M、重心座標R,

重心運動量Pを左図のように定義する。

各質点に対して運動方程式を立て、それらを足し合わせることで、内力は打ち消し合い、

重心の運動方程式　MR’’＝Σ[i=1,n]Fi　が得られる。すなわち、質点系について考えるとき、重心にのみ注目し、系全体にかかる力の和を考えればよい。

また、相対座標r’iを　r’i=ri－R　と定め、相対速度　v’i=vi－V　について考える。

このとき、質点系の運動エネルギーは、重心のエネルギーと相対運動のエネルギーに分離でき、質点系の全角運動量は、重心の角運動量***L****G*と相対運動の（重心のまわりの）角運動量**L**′に分離できる。

第7章　剛体　　一番ムズいところが一番出てるっていうね…

7.1　剛体と釣り合い

剛体には自由度が6個ある。重心の座標で3つ、回転軸の取り方で2つ、軸回りの回転角で1つである。よって、剛体の運動を求めるには方程式が6つ必要。

軸の自由度2つってのがちょいわからんかもしれんですね。蛇足かと思いますが一応軽く解説。

両手でシャーペンを持って手を前に伸ばしましょう。シャーペンは真横に。

右手を上げて左手を下げるとシャーペンは回転しますね。このとき回転してできた面はあなたに対して並行なはず。

また、右手を奥に左手を手前に動かしてもシャーペンは回転しますね。このときの面は床に並行なはず。

このように軸の回転方向には2種類あるんです。あとはシャーペン自体をクルクル回すのが軸回りの回転角。

ボウリングの球を投げるとき、回転をかけて曲げるわけですが、このとき重要なのが回転軸の角度。

1つ目の回転軸の角度(アクシスチルト)は割とつけやすいのですが2つ目の角度(アクシスローテーション)はつけるのがなかなか難しい。そして、曲げる上でより重要なのは2つ目の方の角度なのです。(もちろんチルトも重要ですが)

剛体が釣り合っているためには全運動量P＝0、全角運動量L=0。

全運動量の式から、釣り合いには力の和がゼロである必要があることがわかる。また全角運動量の式から、釣り合いを調べるには任意の点のまわりの力のモーメントを調べればよいことがわかる。

剛体を微小な質点の集合と考えると、全質量M と重心Rは以下のように定義される。

M=∫ρ(r)dV、R=(1/M)∫rρ(r)dV　　　重力は重心にはたらくと考えてよい。

7.2　回転軸のある剛体の運動

z軸を回転軸とする。静止座標系での剛体上のrの速度は　v=ω×r

I≡∫ρ(r)(x2+ y2)dV　　と慣性モーメントIを定義するとz軸方向の角運動量はLz=Iω

ここで剛体の運動を表すのは角速度のみなので、z軸方向の角運動量のみで剛体の運動はわかる。すなわち、Lzの運動方程式さえわかればよい。

dLz/dt=Idω/dt=(d/dt)Σi(miri×vi)z=Σi(mivi×vi+miri×ai)z=Σi(0+ri×Fi)z=τz

dLz/dt=τz 　がこの場合の運動方程式である。

ある軸回りの回転を考えるときに、その軸回りの力のモーメントを寄せ集めたものをトルクτzという。

運動エネルギーは　K=(1/2)Iω2  で表される。

x軸上の質点の運動と回転する剛体との運動の間には次のような対応関係がある。

質量M ↔慣性モーメントI

位置x ↔回転角ϕ

速度v ↔角速度ω

運動量px ↔角運動量Lz

力Fx↔トルクτz

回転軸が重心を通っていない場合もある。回転軸が重心からdだけ離れているとき、重心を通る軸のまわりの慣性モーメントをIG とすると、　I=IG+Md2 が成立(平行軸の定理)

○慣性モーメントの例

・長さ2a、線密度σの細い棒の、重心のまわりの慣性モーメント



・棒の端のまわりの慣性モーメント



・半径a、面密度ρ の薄い円盤の、中心を通り円に垂直な軸のまわりの慣性モーメント



・半径a の球の中心のまわりのモーメント



7.3　剛体の平面運動

剛体がxy 平面上を運動するとき、自由度は重心のxy 座標と回転角ϕ の3 つであり、次の運動方程式で記述される。



*i*

7.2でやった剛体が動き回る…ってことでいいのかな？

すぺしゃるさんくる

シケ対さんのシケプリ(マジで助かりました)

わかりやすいのかわかりにくいのかよくわからん教科書

扇風機