力学レポート　第二回

※ベクトルは太字で表します。
例：ベクトルα → $\boldsymbol{\alpha}$

(1) $mg = m\frac{v_0^2}{r_0}$

よって $r_0 = \frac{v_0^2}{g}$ ・・・(解)

(2)

角運動量$\boldsymbol{l}$は

$$\boldsymbol{l} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = r\boldsymbol{e_r} \times m\left(\frac{dr}{dt}\boldsymbol{e_r} + r\frac{d\theta}{dt}\boldsymbol{e_\theta}\right)$$
$$= mr^2\frac{d\theta}{dt}\boldsymbol{e_z} \cdots ①$$

初期条件から

$$\boldsymbol{l} = mr^2\frac{d\theta}{dt}\boldsymbol{e_z} = mr_0^2\frac{v_0}{r_0}\boldsymbol{e_z} = mr_0v_0\boldsymbol{e_z}$$

よって

$$mr^2\frac{d\theta}{dt}\boldsymbol{e_z} = mr_0v_0\boldsymbol{e_z} \quad ・・・(解)$$

また、運動エネルギーTは、①より$\frac{d\theta}{dt} = \frac{l}{mr^2}$なので

$$T = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2 = \frac{1}{2}m\left\{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right\} = \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{l^2}{2mr^2}$$

よって全エネルギーEは

$$E = T + V(r) = \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + V(r)$$
$$= \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{mr_0^2v_0^2}{2r^2} + mgr$$

初期条件から

$$\mathrm{E} = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgr_0$$

よって

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{mr_0^2v_0^2}{2r^2} + mgr = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgr_0 \quad ・・・（解）$$

(3)

エネルギー保存の式を変形して

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{1}{r^2}\{-2gr^3 + (2gr_0 + v_0^2)r^2 - r_0^2v_0^2\}$$

よって

$$-2gr^3 + (2gr_0 + v_0^2)r^2 - r_0^2v_0^2 \geq 0 \cdots ②$$

$-2gr^3 + (2gr_0 + v_0^2)r^2 - r_0^2v_0^2 = 0$ は $r = r_0$ を解にもつので

②は

$$(r - r_0)(2gr^2 - v_0^2r - r_0v_0^2) \leq 0$$

と変形できる。

よってrの範囲は

(ⅰ) $\begin{cases} r-r_0 \geq 0 \\ 2gr^2-v_0^2r-r_0v_0^2 \leq 0 \end{cases}$

または

(ⅱ) $\begin{cases} r-r_0 \leq 0 \\ 2gr^2-v_0^2r-r_0v_0^2 \geq 0 \end{cases}$

(ⅰ)のとき

$$\begin{cases} r \geq r_0 \\ \left(r-\frac{v_0^2-\sqrt{v_0^2(v_0^2+8gr_0)}}{4g}\right)\left(r-\frac{v_0^2+\sqrt{v_0^2(v_0^2+8gr_0)}}{4g}\right) \leq 0 \end{cases}$$

より

$$\begin{cases} r \geq r_0 \\ \frac{v_0^2-\sqrt{v_0^2(v_0^2+8gr_0)}}{4g} < 0 \leq r \leq \frac{v_0^2+\sqrt{v_0^2(v_0^2+8gr_0)}}{4g} \end{cases}$$

$r_0 > \frac{v_0^2+\sqrt{v_0^2(v_0^2+8gr_0)}}{4g}$ すなわち $r_0 > \frac{v_0^2}{g}$ のとき、この条件を満たす r は存在しない。

$r_0 \leq \frac{v_0^2}{g}$ のとき、$r_0 \leq r \leq \frac{v_0^2+\sqrt{v_0^2(v_0^2+8gr_0)}}{4g}$

(ⅱ)のとき

$$\begin{cases} r \leq r_0 \\ \left(r-\frac{v_0^2-\sqrt{v_0^2(v_0^2+8gr_0)}}{4g}\right)\left(r-\frac{v_0^2+\sqrt{v_0^2(v_0^2+8gr_0)}}{4g}\right) \geq 0 \end{cases}$$

より

$$\begin{cases} r \leq r_0 \\ r \leq \dfrac{v_0^2 - \sqrt{v_0^2(v_0^2 + 8gr_0)}}{4g}, \quad \dfrac{v_0^2 + \sqrt{v_0^2(v_0^2 + 8gr_0)}}{4g} \leq r \end{cases}$$

$r_0 < \frac{v_0^2+\sqrt{v_0^2(v_0^2+8gr_0)}}{4g}$ すなわち $r_0 < \frac{v_0^2}{g}$ のとき、この条件を満たすrは存在しない。

$r_0 \geq \frac{v_0^2}{g}$ のとき、$\frac{v_0^2+\sqrt{v_0^2(v_0^2+8gr_0)}}{4g} \leq r \leq r_0$

よって r の変化する範囲は

$r_0 \leq \frac{v_0^2}{g}$ のとき、$r_0 \leq r \leq \frac{v_0^2+\sqrt{v_0^2(v_0^2+8gr_0)}}{4g}$

$r_0 \geq \frac{v_0^2}{g}$ のとき、$\frac{v_0^2+\sqrt{v_0^2(v_0^2+8gr_0)}}{4g} \leq r \leq r_0$ ・・・(解)