物理学A（力学）　レポート第2回 5月19日出題 5月26日提出

バネ定数kのバネに質量mの質点がつけられている。つりあいの位置からの質点の変位がxのとき、質点には復元力$-kx$が働く。（摩擦力は働かないとする。）さらに、外力$F_{ext}(t) = F_0 \cos \omega t$が質点に働くとする。

(1) 時刻$t = 0$において$x(0) = x_0$、$v(0) = v_0$とするとき時刻tにおける$x(t)$を求めよ。但し、$\omega \neq \omega_0$ ($\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$) とする。

(2)$x_0 = v_0 = 0$, $\omega = 11\ \mathrm{sec}^{-1}$, $\omega_0 = 9\ \mathrm{sec}^{-1}$のとき、$0 \leq t \leq 2\pi$ secに対する$x(t)$を図示し、その物理的意味を説明せよ。
（参考 $\cos A - \cos B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{B-A}{2}$）

(3)$x_0 = v_0 = 0$, $\omega = \omega_0$のときの$x(t)$を求め、その物理的意味を説明せよ。

(1) 運動方程式 $\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0^2 x=\frac{F_0\cos\omega t}{m}$ ——①

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0^2 x=0 \quad \text{——②}$$

①の一般解は，①の特解と②の一般解の和.

(i) ①の特解を求める.

特解 $x_s(t)=Ce^{i\omega t}$ と仮定すると.

$$(-\omega^2+\omega_0^2)Ce^{i\omega t}=\frac{F_0}{m}e^{i\omega t} \qquad \therefore C=\frac{F_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)}$$

$$\therefore x_s(t)=\frac{F_0\cos\omega t}{m(\omega_0^2-\omega^2)}$$

(ii) ②の一般解を求める.

$x=e^{pt}$ とすると，$(p^2+\omega_0^2)e^{pt}=0$ $\therefore p=\pm i\omega_0$

よって，②の一般解 $x_2(t)=e^{\pm i\omega_0 t}$

よって，①の一般解は，

$$x(t)=\frac{F_0\cos\omega t}{m(\omega_0^2-\omega^2)}+C_1e^{i\omega_0 t}+C_2e^{-i\omega_0 t}$$ ——③と表せる
(C_1, C_2は定数)

また，$v(t)=-\frac{F_0\omega\sin\omega t}{m(\omega_0^2-\omega^2)}+C_1e^{i\omega_0 t}+C_2e^{-i\omega_0 t}$ ——④

③，④に $x(0)=x_0$，$v(0)=v_0$ を代入して，

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{F_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)} + C_1 + C_2 \\ v_0 = C_1 i\omega_0 - C_2 i\omega_0 \end{cases}$$

これを計算して、 $C_1 = \dfrac{x_0 i\omega_0 + v_0}{2i\omega_0} - \dfrac{F_0}{2m(\omega_0^2-\omega^2)}$

$C_2 = \dfrac{x_0 i\omega_0 - v_0}{2i\omega_0} - \dfrac{F_0}{2m(\omega_0^2-\omega^2)}$

よって、

$$x(t) = \frac{F_0\cos\omega t}{m(\omega_0^2-\omega^2)} + \left\{\frac{x_0 i\omega_0 + v_0}{2i\omega_0} - \frac{F_0}{2m(\omega_0^2-\omega^2)}\right\} e^{i\omega_0 t} + \left\{\frac{x_0 i\omega_0 - v_0}{2i\omega_0} - \frac{F_0}{2m(\omega_0^2-\omega^2)}\right\} e^{-i\omega_0 t}$$

$$= \frac{F_0\cos\omega t}{m(\omega_0^2-\omega^2)} + \left\{\frac{x_0 i\omega_0 + v_0}{2i\omega_0} - \frac{F_0}{2m(\omega_0^2-\omega^2)}\right\}(\cos\omega_0 t + i\sin\omega_0 t) + \left\{\frac{x_0 i\omega_0 - v_0}{2i\omega_0} - \frac{F_0}{2m(\omega_0^2-\omega^2)}\right\}(\cos\omega_0 t - i\sin\omega_0 t)$$

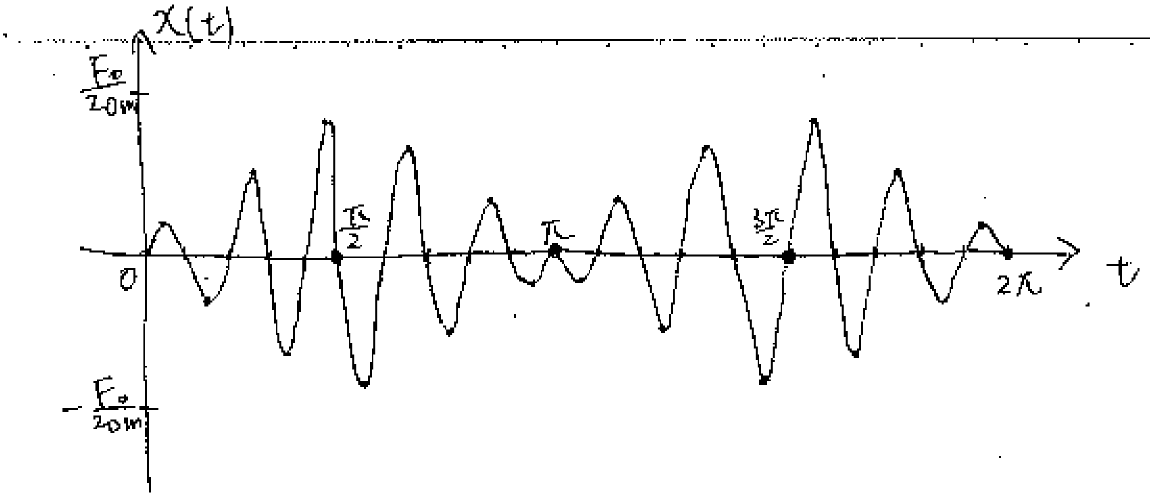
$$= \frac{F_0\cos\omega t}{m(\omega_0^2-\omega^2)} + \left\{x_0 - \frac{F_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)}\right\}\cos\omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t$$

(2) $x_0 = v_0 = 0$, $\omega = 11\,(1/\mathrm{sec})$, $\omega_0 = 9\,(1/\mathrm{sec})$ を上式に代入.

$$x(t) = -\frac{F_0\cos 11t}{40m} + \frac{F_0\cos 9t}{40m}$$

$$= \frac{F_0}{20m}\sin 10t\sin t.$$

グラフは次ページのようになる。



質点は，周期が $\frac{\pi}{5}$ の振動をし，振幅は周期 2π で変化する。

(3) (1)の $x(t)$ に $x_0 = v_0 = 0$ を代入して，

$$x(t) = \frac{F_0 \cos \omega t}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} - \frac{F_0 \cos \omega_0 t}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

$$= \frac{-F_0}{m(\omega_0 + \omega)} \cdot \frac{\cos \omega_0 t - \cos \omega t}{(\omega_0 - \omega)}$$

$\omega \to \omega_0$ のとき，

$$\lim_{\omega \to \omega_0} x(t) = \lim_{\omega \to \omega_0} \frac{-F_0}{m(\omega_0 + \omega)} \cdot \frac{\cos \omega t - \cos \omega_0 t}{(\omega - \omega_0)} \quad \text{---- ⑤}$$

ここで，$f(y) = \cos ty$ とおくと，

$$⑤ = \lim_{\omega \to \omega_0} \frac{-F_0}{m(\omega_0 + \omega)} \cdot \frac{f(\omega) - f(\omega_0)}{(\omega - \omega_0)}$$

$$= \frac{-F_0}{2m\omega_0} \cdot f'(\omega_0) \qquad \left(f'(a) = \lim_{h \to a} \frac{f(h) - f(a)}{h - a} \right)$$

$$= \frac{F_0 t \sin \omega_0 t}{2m\omega_0}$$

時間が経つにつれ振幅が大きくなり，振幅の最大値をとるようになる。
(共鳴)