力学（森松）2010 年度解答例

1.(1) 無限遠からの接近と無限遠への脱出を考えるので、木星とボイジャーの間に働く万有引力によるポテンシャルは無視すると、エネルギー保存則より、

$$\frac{1}{2}mv_i^2 + \frac{1}{2}MV_J^2 = \frac{1}{2}mv_f^2 + \frac{1}{2}MV_f^2 \quad \cdots ①$$

ただし、ボイジャーと木星の質量をそれぞれ m, M、スウィングバイ後の木星の速度を V_f とする。

　また、運動量保存則より、

$$m\vec{v_i} + M\vec{V_J} = m\vec{v_f} + M\vec{V_f} \quad \cdots ②$$

である。よって、① を用いて v_i^2 を、② を用いて $\vec{v_i}$ を消去すると、下式は次のように書き換えられる。

$$(\vec{v_i} - \vec{V_J})^2 = (\vec{v_f} - \vec{V_J})^2 + \frac{M}{m}(\vec{V_J} - \vec{V_f})^2$$

ここで、$m \ll M$ なので $\vec{V_J} = \vec{V_f}$ と近似できることに注目すると、上式は

$$(\vec{v_i} - \vec{V_J})^2 = (\vec{v_f} - \vec{V_J})^2$$

となるので、確かに

$$\left|\vec{v_i} - \vec{V_J}\right| = \left|\vec{v_f} - \vec{V_J}\right|$$

が成立する。

(2)(1) より、

$$\left|\vec{v_f} - \vec{V_J}\right| = \sqrt{v_i^2 + V_J^2 - 2v_i \cdot V_J \cos\theta} = \sqrt{217} \approx 15$$

なので、v_f の最大値は、

$$\max(v_f) = \left|\vec{v_f} - \vec{V_J}\right| + V_J \approx 28[km/s]$$

(コメント) 簡単な問題ですね。授業中でも解説はしていたのですが、一応解きなおしておきました。

2.(1)$n+1$ 回目に発射された弾の速度は $v_{n+1}-u$ だから、$M_n=M_0+M_1-n\Delta m$ とおくと、運動量と力積の関係より、

$$\sum \vec{p_{n+1}} - \sum \vec{p_n} = F\Delta t$$

$$(-\Delta m(u-v_{n+1})+M_{n+1}v_{n+1})-M_n v_n = -\mu' M_n g\Delta t$$

$$M_n\Delta v = u\Delta m - \mu' M_n g\Delta t$$

$$\Delta v = \frac{\Delta m}{M_0+M_1-n\Delta m}u - \mu' g\Delta t$$

となる。

(2)(1) より両辺を Δt で割って、$k=\dfrac{\Delta m}{\Delta t}$ を代入し、極限を取ると、

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{k}{M_0+M_1-kt}u - \mu' g$$

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{k}{M_0+M_1-kt}u - \mu' g$$

となる。

(3)(2) の両辺を $t=0$ から $t=t$ まで積分して、

$$v(t) = -\mu' gt + u\log\frac{M_0+M_1}{M_0+M_1-kt}$$

となる。

(4)$v(t)$ を $t=0$ から $t=T$ まで積分して、

$$\int_0^T v(t)dt = uT - \frac{1}{2}\mu' gT^2 - \frac{u}{k}(M_0+M_1-kT)\log\frac{M_0+M_1}{M_0+M_1-kT}$$

$kT=M_1$ を代入して、

$$\int_0^T v(t)dt = uT - \frac{1}{2}\mu' gT^2 - \frac{u}{k}M_0\log\left(1+\frac{M_1}{M_0}\right)$$

となる。

(コメント)(1) さえ出きれば後はただの計算問題です。ただ、(4) で $kT=M_1$ を代入するのは忘れるかもしれません。(1) の運動量の式で最初に書いた $\sum$ の意味はその時点での弾一発と機関銃の運動量の総和です。察してください。

3.(1)$-\vec{\nabla}\left(-\frac{2c^2}{\sqrt{r}}\right)=2c^2\vec{\nabla}(r^{-\frac{1}{2}})$ を計算してみると、x 成分について、

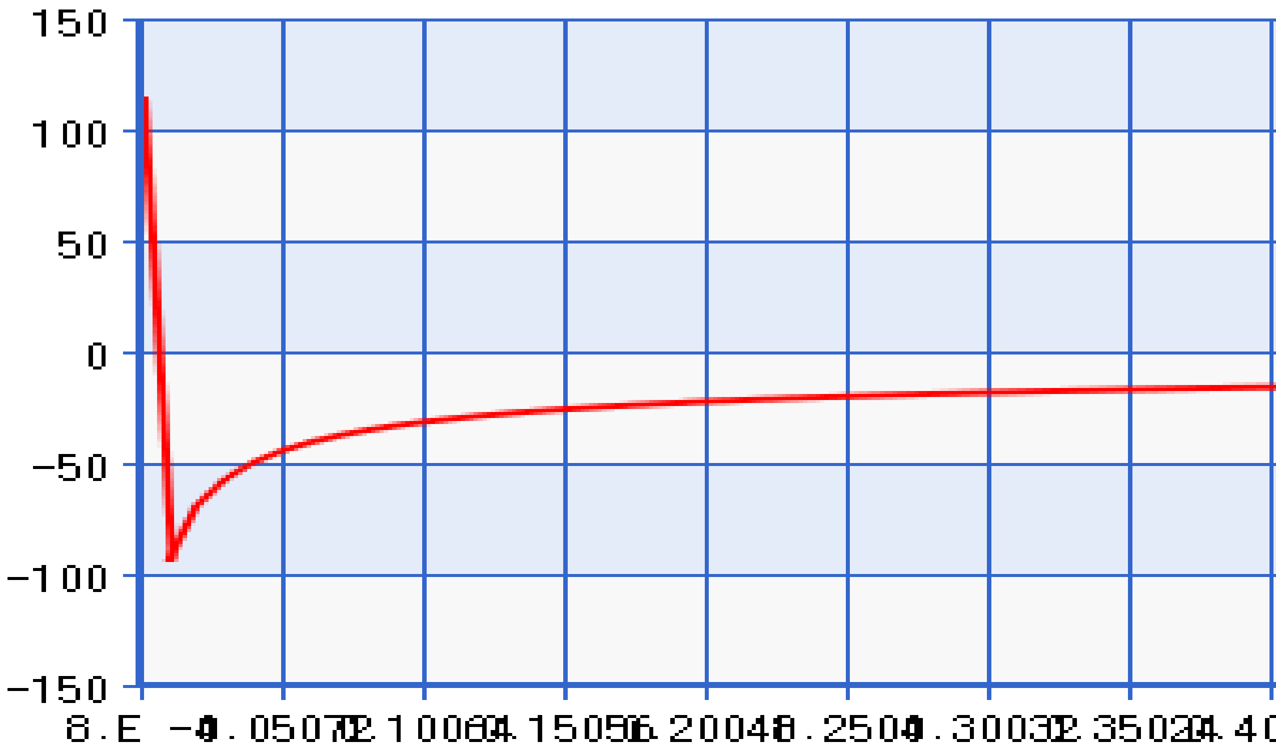
$$2c^2\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{4}}=-c^2(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{4}}x=-\frac{c^2}{r^{\frac{5}{2}}}x$$

となるので、y,z についても同様だから、

$$-\vec{\nabla}\left(-\frac{2c^2}{\sqrt{r}}\right)=-\frac{c^2}{r^{\frac{5}{2}}}\vec{r}=\vec{F}$$

が成り立つので、確かに $V(r)=-\dfrac{2c^2}{\sqrt{r}}$ である。

(2)$V'_{eff}(r)=\dfrac{mc^2r^{\frac{3}{2}}-l^2}{mr^3}$ なので、$V_{eff}(r)$ のグラフは下図となる。



また、r の取り得る値の範囲は $V_{eff}(r)\leqq E$ なので、

$E>0$ のとき $r\geqq V_{eff}^{-1}(E)$

$E<0$ のとき、$V_{eff}(r_1)=V_{eff}(r_2)=E, r_1<r_2$ となる r_1,r_2 が存在して、$r_1\leqq r\leqq r_2$

である。

(3)(2) より、$V'_{eff}(r)=0$ となるとき $r=r_{min}$ だから、

$$mc^2 r_{min}^{\frac{3}{2}} - l^2 = 0$$

$$r_{min} = \left(\frac{l^2}{mc^2}\right)^{\frac{2}{3}}$$

である、また、$E=V_{min}$ のときは (2) と同様に考えて、運動は $r=r_{min}$ で一定となる。つまり、円運動をする。

(4)$r=r_{min}$ を中心として振動する。

(コメント) 具体的でない力学の問題はたまにしか出題されませんが、定義を正確に覚えている必要があるので面倒といえば面倒です。(1) では直接 $\vec{F}$ から $V(r)$ を求めることもできますが、基点をどこにするか考えるよりは、せっかく与えてくれている $V(r)$ を使って逆演算をしたほうが簡単でしょう。(2) のグラフは m,c,l に適当な値を代入して書かせたのですが、どうしても極値周辺が滑らかに書けませんでした。本当は滑らかです。