森松講師 07 年過去問解答

※以下の解答について, 正しいという保障はできませんのでご了承ください.

1. おもりの質量が m, 糸の長さが l であるような振り子の運動を考える. おもりは, 糸の張力によって, 常に糸の支点 O を中心とする半径 l の円周上に束縛されている.

(1) 振り子の振れ角を φ として, エネルギー保存の関係式を表せ.

(解答)

$$\frac{1}{2}mv^2 - mgl\cos\varphi = E\ (\mathrm{const.})$$

(2) 糸の長さが $0.2\,\mathrm{m}$, $\varphi = 0$ のときのおもりの速度が $1.4\,\mathrm{m/s}$ であるとする. このとき, φ の取り得る値の範囲を求めよ.

(解答)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}mv^2 - mgl\cos\varphi &= \frac{1}{2}mv_0^2 - mgl \\ 0 \le \frac{1}{2}mv^2 &= mgl\cos\varphi + \frac{1}{2}mv_0^2 - mgl\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \cos\varphi &\ge 1 - \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{gl} \\ &= 1 - \frac{1}{2}\frac{1.4^2}{9.8 \times 0.2} \\ &= 0.5\end{aligned}$$

$$\therefore -\frac{\pi}{3} \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$$

(3) 振り子の振れ角 φ が小さいとして, 振り子の周期を求め, 周期は, 振り子の長さ l には依存するが, 振動の振幅には依存しないことを示せ.

(解答) おもりが中心に戻ろうと働く力は $mg\sin\varphi$ である. 十分振れ幅が小さいとすると一次元運動で近似できて,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}x^2} &= -mg\sin\varphi \\ &= -mg\frac{x}{l}\end{aligned}$$

運動方程式よりおもりは単振動をして, 角速度 $\sqrt{\dfrac{g}{l}}$, 周期 $2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$. よって周期はおもりの長さ l のみに依存する.

2. 時刻 $t = 0$ において, 地表から初速度 v_0 で鉛直上方に物体を打ち上げる.

(1) この物体が地表から高さ z に到達したときの速度 v を v_0, 地球の半径 R, 地表における重力加速度 g で表せ. 但し, 空気の抵抗は無視する.

(解答)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM}{R+z} &= \frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{mM}{R} \\ v &= \sqrt{v_0^2 - 2gR\frac{z}{R+z}}\end{aligned}$$

(2) この物体が $z=\infty$ まで到達できるための最小の v_0 の値 v_e を求めよ. 但し, $g=9.8\,\mathrm{m/s^2}$, $R=6.4\times10^6\,\mathrm{m}$ とする.

(解答)

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{2}mv_e^2 - G\frac{mM}{R} \\
mg &= G\frac{mM}{R^2} \\
\therefore v_e &= \sqrt{2gR} \\
&\fallingdotseq 11.2\,\mathrm{km/s}
\end{aligned}
$$

(3) $v_0 = v_e$ の場合に

$$
\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}z} = \sqrt{\frac{2gR^2}{R+z}}
$$

が成り立つことを示し, z を t の関数として求めよ.

(解答)

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM}{R+z} &= 0 \\
\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}z} &= \sqrt{\frac{2gR^2}{R+z}} \\
z = R^{2/3}\left(\sqrt{R}+\frac{3}{2}\sqrt{2g}t\right)^{2/3} &- R
\end{aligned}
$$

(4) (3) で求めた z を t についての Taylor 展開の 3 次の項まで求め, その物理的意味を述べよ.

(解答)

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}z} &= (2g)^{1/2}R^{2/3}\left(R^{1/2}+\frac{3}{2}\sqrt{2g}t\right)^{-1/3} \\
\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}z^2} &= -gR^{2/3}\left(R^{1/2}+\frac{3}{2}\sqrt{2g}t\right)^{-4/3} \\
\frac{\mathrm{d}^3z}{\mathrm{d}z^3} &= 2^{3/2}g^{3/2}R^{2/3}\left(R^{1/2}+\frac{3}{2}\sqrt{2g}t\right)^{-7/3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z(0) = 0 &\qquad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}z}(0) = \sqrt{2gR} \\
\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}z^2}(0) = -g &\quad \frac{\mathrm{d}^3z}{\mathrm{d}z^3}(3) = (2g)^{3/2}R^{7/9}
\end{aligned}
$$

$$
\therefore z = \underbrace{\sqrt{2gR}t}_{\text{等速による近似}} \qquad \underbrace{-\tfrac{1}{2}gt^2}_{\text{重力の 1 次近似/一様重力 } mg \text{ による近似}} \qquad \underbrace{+\tfrac{2}{3}g\sqrt{2g}R^{7/9} + \mathrm{O}(t^4)}_{\text{2 次以上の重力の効果}}
$$

3. 質量 M_0 の機関銃に質量 Δm の弾を N 発込めて水平面上に置く. 弾は機関銃に対して相対速度 u で, Δt の間隔で自動的に連射される. 連射速度は十分速く, 単位時間あたり質量 $k=\Delta m/\Delta t$ の割合で連続的であると見なせるとし, $T=N\Delta t$, $M_1=N\Delta m$ とする.($k=M_1/T$) また, 機関銃が水平面を滑るときの摩擦係数を μ' とする.

(1) n 回目と $n+1$ 回目の発射直後の機関銃の速度をそれぞれ v_n, v_{n+1} とするとき, $\Delta v = v_{n+1} - v_n$ は, 微小量について一次の近似で, どのように与えられるか. また, $t = n\Delta t$ として, 機関銃の速度 $v(t)$ に対する微分方程式を導け.

(解答)

n 回目の発射後の機関銃の質量は, $M_n = M_0 + M_1 - n\Delta m$ である. 運動量の変化と力積の関係より,

$$
\begin{aligned}
&M_{n+1}v_{n+1} + \Delta m(v_{n+1} - u) - M_n v_n = -\mu' M_n g \Delta t \\
\iff &(M_0 + M_1 - (n+1)\Delta m)(v_n + \Delta v) + \Delta m(v_n + \Delta v - u) - (M_0 + M_1 - n\Delta m)v_n \\
&= -\mu'(M_0 + M_1 - n\Delta m) g \Delta t \\
\iff &(M_0 + M_1 - n\Delta m)\Delta v - \Delta m u = -\mu'(M_0 + M_1 - n\Delta m) g \Delta t
\end{aligned}
$$

$$
\therefore \Delta v = \frac{\Delta m u}{M_0 + M_1 - n\Delta m} - \mu' g \Delta t \ \cdots\cdots \ (\text{答})
$$

$k = \Delta m / \Delta t$, $t = n\Delta t$ より, $n\Delta m = kt$ なので,

$$
\begin{aligned}
\therefore \Delta v &= \frac{\Delta m u}{M_0 + M_1 - kt} - \mu' g \Delta t \\
\frac{\Delta v}{\Delta t} &= \frac{ku}{M_0 + M_1 - kt} - \mu' g \\
\therefore \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}v} &= \frac{ku}{M_0 + M_1 - kt} - \mu' g \ \cdots\cdots \ (\text{答})
\end{aligned}
$$

(式の途中で出てくる $n\Delta m \Delta v$ は二次の微小量を含んではいるんですが, Δt が無限小である代わりに発射回数 n が無限大（？）とみなせるので, 二次の微小量として無視はしない方が良いと思います (というか無視すると微分方程式が立てられません).
あるいは $n\Delta m \Delta v = kt\Delta v$ とすれば, $n\Delta m \Delta v$ が実際には一次の微小量であることが分かると思います.
もっと具体的に言えば, 数式上 $\Delta t \to 0$ という極限操作を行うときに, $k = \Delta m/\Delta t$, $t = n\Delta t$ という二つの値を一定に保って考える必要があります.)

(2) (1) で導いた微分方程式を解くことにより, 時刻 t における機関銃の速度 $v(t)$ を求めよ.

(解答)

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}v} &= \frac{ku}{M_0 + M_1 - kt} - \mu' g \\
\int_0^v v\,\mathrm{d}v &= \int_0^t \left\{ \frac{ku}{M_0 + M_1 - kt} - \mu' g \right\} \mathrm{d}t \\
\therefore v &= -u\left(\log(M_0 + M_1 - kt) - \log(M_0 + M_1)\right) - \mu' g t \\
&= u \log\left(\frac{M_0 + M_1}{M_0 + M_1 - kt} \right) - \mu' g t
\end{aligned}
$$

(3) 弾を撃ち終えたとき, 機関銃はどれだけ移動したか.

(解答)

$kT = kN\Delta t = N\Delta m$ に注意して,

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} &= u\left(\log(M_0 + M_1) - \log(M_0 + M_1 - kt)\right) - \mu' g t \\
\therefore x &= \int_0^T \left\{ u\left(\log(M_0 + M_1) - \log(M_0 + M_1 - kt)\right) - \mu' g t \right\} \mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

$\displaystyle\int \log x \,\mathrm{d}x = x \log x - x + C$ だから,

$$
\begin{aligned}
x &= \left[u \log(M_0 + M_1)t + \frac{u}{k} \left\{ (M_0 + M_1 - kt) \log(M_0 + M_1 - kt) - (M_0 + M_1 - kt) \right\} - \frac{\mu' g t^2}{2} \right]_0^T \\
&= u \log(M_0 + M_1)T + \frac{u}{k} \left\{ M_0 \log M_0 - (M_0 + M_1) \log(M_0 + M_1) + M_1 \right\} - \frac{\mu' g T^2}{2}
\end{aligned}
$$