力学（森松）2009 年度解答例

1.(1)$\varphi = 0$ のときのおもりの速度を v_0 とすると、エネルギー保存則は

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mgl(1-\cos\varphi) \ \cdots ①$$

となる。

(2)① より、求める φ の範囲は $v^2 \geqq 0$ となる範囲だから、

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - mgl(1-\cos\varphi) \geqq 0$$

$$\cos\varphi \geqq 1 - \frac{v_0^2}{2gl}$$

各数値を代入して、

$$\cos\varphi \geqq \frac{1}{2}$$

$$-\frac{\pi}{3} \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{3}$$

となる。

(3)① に $v = l\dfrac{d\varphi}{dt}$ と、近似式 $\cos\varphi = 1 - \dfrac{1}{2}\varphi^2$ を代入すると、

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}ml^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + mgl\varphi^2$$

$$\left(\frac{v_0^2}{gl} - \varphi^2\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

となるので、両辺を $t=0$ から $t=t$ まで積分して、

$$\varphi = \frac{v_0}{\sqrt{gl}}\sin\theta$$

と置換すると、

$$\arcsin\varphi = \sqrt{\frac{g}{l}}t + \arcsin\varphi_0$$

$$\varphi = \sin\sqrt{\frac{g}{l}}t + \arcsin\varphi_0$$

となるので、振り子の周期 T は

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

となり、l のみに依存する。

(コメント)(1) の書き方はほかにも一定値を E とおいて書く方法もありますが、どうせ (2) で v_0 を使うので先に使いました。(3) は強引に φ を解きましたが、他の解答のように一次元運動に帰着させる方法もあります。

2.(1) エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM}{z+R} = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GmM}{R}$$

となるが、$z = 0$ のときに働く万有引力と重力加速度の関係から、

$$\frac{GM}{R^2} = g$$

なので、これを上式に代入して v について整理すると、

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2gR + \frac{2gR^2}{z+R}} \ \cdots ①$$

となる。

(2)$z \to \infty$ のとき $v \to 0$ となる定数 v_0 の値を求めればいいので、① より、

$$v_e^2 - 2gR = 0$$

$$v_e = \sqrt{2gR} = 1.12 \times 10^4 [m/s]$$

となる。

(3)$v_0 = v_e$ を ① に代入して、

$$v = \sqrt{\frac{2gR^2}{z+R}} \ \cdots ②$$

となる。よってこれを整理して、

$$\sqrt{z+R}\frac{dz}{dt} = \sqrt{2gR^2}$$

となるから、両辺を $t=0$ から $t=t$ まで積分して、

$$\frac{2}{3}(z+R)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}R^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2gR^2}t$$

$$z = \left\{R^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}\sqrt{2gR^2}t\right\}^{\frac{2}{3}} - R$$

$$z = R\left[\left\{1+\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2g}{R}}t\right\}^{\frac{2}{3}} - 1\right]$$

となる。

(4) まず、$t=0$ のとき $z=0, v=v_e=\sqrt{2gR^2}$ である。次に ② の両辺を t で微分して、

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{1}{2}\sqrt{2gR^2}(z+R)^{-\frac{3}{2}}\frac{dz}{dt}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -gR^2(z+R)^{-2}$$

さらに t で微分して、

$$\frac{d^3z}{dt^3} = 2gR^2(z+R)^{-3}\frac{dz}{dt}$$

となるから、$t=0$ のとき、

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -g\ ,\ \frac{d^3z}{dt^3} = 2g\sqrt{\frac{2g}{R}}$$

である。よって z を $Taylor$ 展開すると、

$$z = \sqrt{2gR}t - \frac{1}{2}gt^2 + \frac{g}{3}\sqrt{\frac{2g}{R}}t^3$$

となる。2 次までの項は自由落下を意味し、3 次以上の項は一様重力と万有引力の誤差を表す。

(コメント)(1) で地球と物体の距離を z としないように注意しましょう。(3) で焦って z を t で表すのを忘れないで下さい。また、(4) では z を直接微分するのもありなのですが、書く量が増えるので工夫しました。

3. 発射された弾の速度が $v_{n+1}-u$ であることに注意して、$M_n = M_0 + M_1 - n\Delta m$ とおくと、運動量と力積に関係より、

$$\Delta m(v_{n+1}-u) + M_{n+1}v_{n+1} - M_nv_n = -\mu' M_ng\Delta t$$

$$M_n \Delta v = u\Delta m - \mu' M_n g \Delta t$$
$$\Delta v = \frac{\Delta m}{M_0 + M_1 - n\Delta m} u - \mu' g \Delta t$$

となる。両辺を Δt で割って、$k = \dfrac{\Delta m}{\Delta t}$ を代入し、極限を取ると、

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{k}{M_0 + M_1 - kt} u - \mu' g$$
$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{k}{M_0 + M_1 - kt} u - \mu' g$$

となる。

(2)(1) の両辺を $t = 0$ から $t = t$ まで積分して、

$$v(t) = -\mu' g t + u \log \frac{M_0 + M_1}{M_0 + M_1 - kt}$$

となる。

(3)$v(t)$ を $t = 0$ から $t = T$ まで積分して、

$$\int_0^T v(t)dt = uT - \frac{1}{2}\mu' g T^2 - \frac{u}{k}(M_0 + M_1 - kT) \log \frac{M_0 + M_1}{M_0 + M_1 - kT}$$

$kT = M_1$ を代入して、

$$\int_0^T v(t)dt = uT - \frac{1}{2}\mu' g T^2 - \frac{u}{k} M_0 \log \left(1 + \frac{M_1}{M_0}\right)$$

となる。

(コメント)(1) で弾の速度を間違えなければ大丈夫でしょう。ちなみにこれを一般化すると、

力 F が作用しているとき、相対速度 u で単位時間あたりに $\left|\frac{dm}{dt}\right|$ の割合で質量を噴出または吸着しているとき、運動方程式は

$$m\frac{dv}{dt} = F + \frac{dm}{dt} u$$

となります。導出の仕方は本問と同じです。