# 力学（森松）2000 年度解答例

1.(1) 人工衛星の運動方程式は、地球の中心からの距離が $R+h$ であることに注意すると、

$$m\left(\frac{d^2h}{dt^2}-(h+R)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right)=-\frac{GMm}{(h+R)^2}$$

となり、また $h=0$ において万有引力の大きさが $mg$ となることを利用すると、

$$\frac{GMm}{R^2}=mg$$

であるから、これを上式に戻して、

$$m\left(\frac{d^2h}{dt^2}-(h+R)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right)=-mg\frac{R^2}{(h+R)^2}$$

となる。ここで、高度 $h$ は一定だから、上式はさらに、

$$(h+R)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=g\frac{R^2}{(h+R)^2}$$

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{R}{h+R}\sqrt{\frac{g}{h+R}}$$

となる。よって、人工衛星の速度は、

$$v=\sqrt{\left(\frac{dh}{dt}\right)^2+(h+R)^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}=(h+R)\frac{d\theta}{dt}=R\sqrt{\frac{g}{h+R}}$$

となるので、求める周期は、

$$T=\frac{2\pi(h+R)}{v}=2\pi\left(1+\frac{h}{R}\right)\sqrt{\frac{h+R}{g}}$$

である。

(2) 地上の観測者の角速度 $\omega_0$ と人工衛星 $\omega$ の角速度が一致すれば、静止衛星となる。

まず、

$$\omega_0=\frac{2\pi}{24\times 60^2}=\frac{\pi}{43200}$$

であり、$\omega = \dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{R}{h+R}\sqrt{\dfrac{g}{h+R}}$ であるから、条件式は、

$$\frac{R}{h+R}\sqrt{\frac{g}{h+R}} = \frac{\pi}{43200}$$

$$gR^2 \cdot \left(\frac{43200}{\pi}\right)^2 = (h+R)^3$$

$$h = \left(gR^2 \cdot \left(\frac{43200}{\pi}\right)^2\right)^{\frac{1}{3}} - R$$

これを計算すると、

$$h \approx 3.6 \times 10^7\,[m]$$

となる。

(3) エネルギー保存則より、

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - mgR = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{mgR^2}{R+h}$$

この式に $v = R\sqrt{\frac{g}{h+R}}$ を代入して $v_0$ について整理すると、

$$v_0^2 = \frac{gR(3R+2h)}{R+h}$$

となるので、これに $g, R, h$ の値を代入すると、

$$v_0^2 = 1.349 \times 10^8$$

よって求める値は、

$$v_0 = 1.2 \times 10^4\,[m/s]$$

である。

(コメント) 正直いって、なんでこんな計算をするはめになったのかわかりません。だいたいこんな計算は電卓がないと無理です。絶対もっとまともな方法があるの思うのですが…。誰かまともな方法を教えてください。特に (2) の計算が意味不明です。どこにも物理的要素を感じませんでした。式だけ導出して放置したくなります。

2.(1) 運動方程式は、

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - m\gamma\frac{dx}{dt}$$

となるので、$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ として、次の特性方程式

$$\lambda^2 + \gamma\lambda + \omega_0^2 = 0$$

の解によって場合分けする。

①異なる実数解のとき、$\gamma^2 - 4\omega_0^2 > 0$ だから、$\gamma > 2\omega_0$ のときで、解を、

$$\lambda_1 = \frac{-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2}}{2}, \lambda_2 = \frac{-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2}}{2}$$

とおくと、一般解は、

$$x = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 e^{\lambda_2 t}$$

なので、初期条件 $t = 0$ のとき、$x = x_0, v = v_0$ を満たすように $\alpha_1, \alpha_2$ を決めると、

$$x\left(t\right) = x_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t}(\cosh w_1 t + \frac{\gamma}{2w_1}\sinh w_1 t) + \frac{v_0}{w_1} e^{-\frac{\gamma}{2}t}\sinh w_1 t$$

となる。ただし、$w_1 = \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2}$ とする。

②重解のとき、$\gamma = 2\omega_0$ であり、解は

$$\lambda = -\frac{\gamma}{2}$$

だから、一般解は

$$x\left(t\right) = \alpha_1 e^{\lambda t} + \alpha_2 e^{\lambda t}$$

となるので、初期条件 $t = 0$ のとき、$x = x_0, v = v_0$ を満たすように $\alpha_1, \alpha_2$ を決めると、

$$x\left(t\right) = x_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t} + (\frac{\gamma}{2}x_0 + v_0)te^{-\frac{\gamma}{2}t}$$

となる。

③虚数解のとき、$\gamma < 2\omega_0$ であり、解は、

$$\lambda_1 = \frac{-\gamma + i\sqrt{4\omega_0^2 - \gamma^2}}{2}, \lambda_2 = \frac{-\gamma - i\sqrt{4\omega_0^2 - \gamma^2}}{2}$$

だから、、一般解は、

$$x\left(t\right) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 e^{\lambda_2 t}$$

である。初期条件 $t = 0$ のとき、$x = x_0, v = v_0$ を満たすように $\alpha_1, \alpha_2$ を決め、オイラーの公式

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

によって、整理すると、

$$x\left(t\right) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}(x_0\cos\omega_1 t + \frac{\gamma x_0 + 2v_0}{2\omega_1}\sin\omega_1 t)$$

となる。ただし、$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}$ とする。
以上をまとめると、解は
$\gamma > 2\omega_0$ のとき、$x\left(t\right) = x_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t}(\cosh w_1 t + \dfrac{\gamma}{2w_1}\sinh w_1 t) + \dfrac{v_0}{w_1}e^{-\frac{\gamma}{2}t}\sinh w_1 t$
ただし、$w_1 = \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2}$
$\gamma = 2\omega_0$ のとき、$x\left(t\right) = x_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t} + (\dfrac{\gamma}{2}x_0 + v_0)te^{-\frac{\gamma}{2}t}$
$\gamma < 2\omega_0$ のとき、$x\left(t\right) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}(x_0\cos\omega_1 t + \dfrac{\gamma x_0 + 2v_0}{2\omega_1}\sin\omega_1 t)$
ただし、$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}$
となる。

(2) 運動方程式は
$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - m\gamma\frac{dx}{dt} + F_0\cos\omega t$$
となるので、この方程式の一般解は、(1) で求めた一般解に特解を加えたものであるから、まず、特解を求める。

まず、計算を簡単にするために上の微分方程式を複素数範囲まで拡張すると、
$$\frac{d^2\hat{x}}{dt^2} + \gamma\frac{d\hat{x}}{dt} + \omega_0^2\hat{x} = \frac{F_0}{m}e^{i\omega t}$$
となるので、$\hat{x} = Ce^{i\omega t}$ を代入すると、
$$(-\omega^2 + \gamma\omega i + \omega_0^2)Ce^{i\omega t} = \frac{F_0}{m}e^{i\omega t}$$
となるので、
$$C = \frac{F_0}{m}\cdot\frac{1}{-\omega^2 + \gamma\omega i + \omega_0^2}$$
であるから、
$$\hat{x} = \frac{F_0}{m}\cdot\frac{1}{-\omega^2 + \gamma\omega i + \omega_0^2}e^{i\omega t} = \frac{F_0}{m}\cdot\frac{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}(\cos\omega t + i\sin\omega t)$$
となる。よって特解は
$$\mathrm{Re}(\hat{x}) = \frac{F_0}{m}\cdot\frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}\left\{(\omega_0^2 - \omega^2)\cos\omega t + \gamma\omega\sin\omega t\right\}$$
である。よって (1) の場合分けに従って再び定数 $\alpha_1, \alpha_2$ を決めると、
$\gamma > 2\omega_0$ のとき、
$x\left(t\right) = \left(x_0 - \dfrac{F_0}{m}\cdot\dfrac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}\right)e^{-\frac{\gamma}{2}t}(\cosh w_1 t + \dfrac{\gamma}{2w_1}\sinh w_1 t)$
$+\dfrac{1}{w_1}\left(v_0 - \dfrac{F_0}{m}\cdot\dfrac{\gamma\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}\right)e^{-\frac{\gamma}{2}t}\sinh w_1 t$

$+\dfrac{F_0}{m}\cdot\dfrac{1}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}\left\{(\omega_0^2-\omega^2)\cos\omega t+\gamma\omega\sin\omega t\right\}$
ただし、$w_1=\sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2-\omega_0^2}$
$\gamma=2\omega_0$ のとき、
$x\left(t\right)=\left(x_0-\frac{F_0}{m}\cdot\frac{\omega_0^2-\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}\right)e^{-\frac{\gamma}{2}t}$
$+\left\{\frac{\gamma}{2}\left(x_0-\frac{F_0}{m}\cdot\frac{\omega_0^2-\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}\right)+\left(v_0-\frac{F_0}{m}\cdot\frac{\gamma\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}\right)\right\}te^{-\frac{\gamma}{2}t}$
$+\dfrac{F_0}{m}\cdot\dfrac{1}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}\left\{(\omega_0^2-\omega^2)\cos\omega t+\gamma\omega\sin\omega t\right\}$
$\gamma<2\omega_0$ のとき、
$x\left(t\right)=e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left(x_0-\frac{F_0}{m}\cdot\frac{\omega_0^2-\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}\right)\cos\omega_1 t$
$+\dfrac{e^{-\frac{\gamma}{2}t}}{2\omega_1}\left\{\gamma\left(x_0-\dfrac{F_0}{m}\cdot\dfrac{\omega_0^2-\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}\right)+2\left(v_0-\dfrac{F_0}{m}\cdot\dfrac{\gamma\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}\right)\right\}\sin\omega_1 t$
$+\dfrac{F_0}{m}\cdot\dfrac{1}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}\left\{(\omega_0^2-\omega^2)\cos\omega t+\gamma\omega\sin\omega t\right\}$
ただし、$\omega_1=\sqrt{\omega_0^2-\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}$
となる。

(3) まず、$\gamma=0$ は $\gamma<2\omega_0$ のときに該当するので、この式に $\gamma=0$ を代入すると、

$$x(t)=\left(x_0-\frac{F_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)}\right)\cos\omega_0 t+\frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t+\frac{F_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)}\cos\omega t$$

$$x(t)=x_0\cos\omega_0 t+\frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t-\frac{F_0}{m(\omega_0+\omega)}\cdot\frac{\cos\omega t-\cos\omega_0 t}{\omega-\omega_0}$$

となる。次に $\omega\to\omega_0$ の極限をとると、

$$\frac{\cos\omega t-\cos\omega_0 t}{\omega-\omega_0}\to -t\sin\omega_0 t$$

となるので、$\gamma=0,\omega=\omega_0$ のとき、

$$x(t)=x_0\cos\omega_0 t+\left(\frac{v_0}{\omega_0}+\frac{F_0}{2m\omega_0}t\right)\sin\omega_0 t$$

となる。

(4) 図は省略します。一般的な単振動のグラフに振幅が発散する振動を足すだけです。
物理的意味は、この条件のとき、質点は共鳴している。

(コメント) この計算量はとても激しいですね。確かにやってることは基本的なことだけなのですが。(2) の答えはもう少しきれいに整理したほうが見た目がいい

のですが、面倒になったのでやめました。正直言って本番でそんなことしてる余裕があるのか不明です。しかし、一度この計算を乗り切れば大抵の計算は苦にならないでしょう。基本の確認として一度はやっておきましょう。

3. まず、糸の張力を $T$ とすると、机の上にある質点 1 の運動方程式は

$$\text{軌道中心方向成分：} m\left(\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right)=-T\cdots ①$$
$$\text{軌道接線方向成分：} m\cdot\frac{1}{r}\left[\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)\right]=0\cdots ②$$

つり下がっている質点 2 の運動方程式は $r$ の変位と $z$ の変位が等しいことから、

$$m\frac{d^2r}{dt^2}=T-mg\cdots ③$$

と表すことができる。さらに、極座標において $v$ は次式で表される。

$$v=\sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}\cdots ④$$

(1)　質点 1 が円運動するとき、$r=r_0$ なので、$\frac{dr}{dt}=0$ だから、① より、

$$m\left(0-r_0\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right)=-T\cdots ⑤$$

③ より、

$$m\cdot 0=T-mg\cdots ⑥$$

また、④ より $v_0=r_0\frac{d\theta}{dt}$ だから、⑤, ⑥ から、求める条件は

$$v_0=\sqrt{gr_0}$$

である。

(2)　まず、角運動量保存の式は、② より、$mr^2\frac{d\theta}{dt}=Const.$ であるので、$t=0$ のときの $\frac{d\theta}{dt}$ の値を求める。

まず、極座標の定義から、

$$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$$

なので、各辺を $t$ で微分すると、

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dr}{dt}\cos\theta-r\frac{d\theta}{dt}\sin\theta, \frac{dy}{dt}=\frac{dr}{dt}\sin\theta+r\frac{d\theta}{dt}\cos\theta$$

となるから、整理して、

$$\frac{dr}{dt}=\frac{dx}{dt}\cos\theta+\frac{dy}{dt}\sin\theta, r\frac{d\theta}{dt}=\frac{dy}{dt}\cos\theta-\frac{dx}{dt}\sin\theta$$

となるので、$t=0$ のとき、$\dfrac{dx}{dt}=-v_0\sin\theta_0, \dfrac{dy}{dt}=v_0\cos\theta_0$ を代入すれば、

$$\frac{dr}{dt}=0, \frac{d\theta}{dt}=\frac{v_0}{r_0}$$

となる。よって角運動量保存の式は

$$mr^2\frac{d\theta}{dt}=mr_0v_0\cdots⑦$$

となる。次にエネルギー保存の関係式について、①, ③ 式より $T$ を消去して、

$$2m\frac{d^2r}{dt^2}-mr\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2+mg=0$$

次に ⑦ を用いて $\dfrac{d\theta}{dt}$ を消去すると、

$$2m\frac{d^2r}{dt^2}-\frac{mr_0^2v_0^2}{r^3}+mg=0$$

となる。ここで、両辺に $\dfrac{dr}{dt}$ をかけて $t=0$ から $t=t$ まで積分すると、

$$\int_0^t 2m\frac{dr}{dt}\frac{d^2r}{dt^2}dt=\int_0^t\left(\frac{mr_0^2v_0^2}{r^3}-mg\right)\frac{dr}{dt}dt$$

$$\int_0^{\dot{r}} 2m\dot{r}d\dot{r}=\int_{r_0}^{r}\left(\frac{mr_0^2v_0^2}{r^3}-mg\right)dr$$

$$m\left(\dot{r}\right)^2-m0^2=\left(-\frac{mr_0^2v_0^2}{2r^2}-mgr\right)-\left(-\frac{mv_0^2}{2}-mgr_0\right)$$

$$m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\frac{mr_0^2v_0^2}{2r^2}+mgr=\frac{1}{2}mv_0^2+mgr_0\cdots⑧$$

となり、エネルギー保存の関係式が得られる。

(別解) エネルギー保存則はこんな計算をしなくてもできる。
質点の速度をそれぞれ $v_1, v_2$ とすれば、

$$v_1=\sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}, v_2=\frac{dr}{dt}$$

であり、エネルギーと仕事の関係から、

$$\left(\frac{1}{2}mv_1^2+\frac{1}{2}mv_2^2\right)-\left(\frac{1}{2}mv_0^2+\frac{1}{2}m0^2\right)=\int_{r_0}^{r}-mgdr$$

この式を ⑦ を用いて整理すれば ⑧ が得られる。

(3) ⑧ より、求める $r$ の範囲は $m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\geq 0$ となるような $r$ の範囲だから、

$$\left(\frac{1}{2}mv_0^2+mgr_0\right)-\left(\frac{mr_0^2v_0^2}{2r^2}+mgr\right)\geq 0$$

$$\frac{-2gr^3+(v_0^2+2gr_0)r^2-r_0^2v_0^2}{2r^2}\geq 0$$

ここで簡略のために $r_+=\dfrac{v_0^2}{4g}\left\{1+\sqrt{1+\dfrac{8gr_0}{v_0^2}}\right\}\geq 0, r_-=\dfrac{v_0^2}{4g}\left\{1-\sqrt{1+\dfrac{8gr_0}{v_0^2}}\right\}\leq 0$ とおくと、

$$\frac{-2g(r-r_0)(r-r_+)(r-r_-)}{2r^2}\geq 0$$

となるので、求める $r$ の範囲は $r_0$ と $r_+$ の間。より詳しく書くと、
$v_0<\sqrt{gr_0}$ のとき、$r_+\leq r\leq r_0$ となり、質点 2 の初期位置は最上点となる。
$v_0=\sqrt{gr_0}$ のとき、$r=r_0$ となり、質点 2 は静止し続ける。
$v_0>\sqrt{gr_0}$ のとき、$r_0\leq r\leq r_+$ となり、質点 2 の初期位置は最下点となる。

(コメント) やっとまともな問題が出てきました。ポイントはいかにして $\dfrac{d\theta}{dt}$ を求めるかです。また、(3) では $r$ についての 3 次式が出てきて一瞬焦りますが、すぐに当たり前の結果として $r-r_0$ が因数であることに気づきます。この年の問題では完答しやすい問題です。ぜひ取りましょう。