力学（森松）1999年度解答例

1.(1) 運動方程式は地球と物体との距離が $z+R$ であることに注意して、

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{GMm}{(R+z)^2} \ \cdots ①$$

となる。ここで、$z=0$ のとき重力加速度 g を用いて物体にかかる力を表すと、

$$-\frac{GMm}{R^2} = -mg$$

$$GM = gR^2$$

となるので、① を書き直すと、

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = -mg\frac{R^2}{(R+z)^2} \ \cdots ②$$

となる。よってエネルギー保存則から、

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{mgR^2}{R+z} = \frac{1}{2}mv_0^2 - mgR \ \cdots ③$$

となるので、これを整理して、

$$v = \sqrt{\frac{2gR^2}{R+z} - 2gR + v_0^2} \ \cdots ④$$

となる。

(参考)② から ③ を導出するには ② の両辺に $v = \dfrac{dz}{dt}$ をかけて、$\dfrac{d^2z}{dt^2} = \dfrac{dv}{dt}$ とみて、両辺を $t=0$ から $t=t$ まで積分（置換積分）します。興味のある方はやってみてください。第 3 回のレポート問題の解答は上記のような計算を実際にやっています。しかし、試験時間のことを考えると本番でやるのはお勧めしません。ただ、どうしてもわからなくなったら力任せに積分するのも一つの手だと思います。

(2)④ において $z \to \infty$ としたときに v の値が実数値として残るような v_0 の範囲は

$$-2gR + v_0^2 \geqq 0$$

なので、求める最小値は

$$v_e = \sqrt{2gR}$$

であり、その値は

$$v_e = 11.2 \times 10^3 m/s$$

(3)(2) の計算から ④ より

$$v = \sqrt{\frac{2gR^2}{R+z}}$$

となるので、$v = \dfrac{dz}{dt}$ と戻して、変数分離をすると、

$$\sqrt{R+z}\frac{dz}{dt} = \sqrt{2gR^2}$$

となるので、両辺を $t=0$ から $t=t$ まで積分すると、

$$\int_0^z \sqrt{R+z}dz = \int_0^t \sqrt{2gR^2}dt$$

$$\frac{2}{3}(R+z)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2g}Rt + \frac{2}{3}R^{\frac{3}{2}}$$

$$z = \left\{\frac{3}{2}\sqrt{2g}Rt + R^{\frac{3}{2}}\right\}^{\frac{2}{3}} - R$$

となる。

(4)$z|_{t=0} = 0, \dfrac{dz}{dt}|_{t=0} = v_e = \sqrt{2gR}$ は条件から自明。次に ② より

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -g\frac{R^2}{(R+z)^2} \quad \cdots ②'$$

だから、

$$\frac{d^2z}{dt^2}|_{t=0} = -g$$

また、②$'$ を t で微分すると、

$$\frac{d^3z}{dt^3} = \frac{2gR^2}{(R+z)^3}\cdot\frac{dz}{dt}$$

となるから、

$$\frac{d^3z}{dt^3}|_{t=0} = \frac{2g}{R}\cdot\sqrt{2gR}$$

である。よって z の t についての $Taylor$ 展開の 3 次までの項は

$$z = \sqrt{2gR}t - \frac{g}{2}t^2 + \frac{g}{3}\sqrt{\frac{2g}{R}}t^3$$

となる。この物理的意味は、$\sqrt{2gR}t - \dfrac{g}{2}t^2$ までが、自由落下で、$\dfrac{g}{3}\sqrt{\dfrac{2g}{R}}t^3$ は自由落下に対して実際の物体に働く力が一定でないことの効果である。

(コメント) この問題は基本的な問題なので、必ず全問正解したいところです。ポイントがあるとすれば (4) の $Taylor$ 展開においていちいち (3) で求めた z を微分しないようにすることくらいでしょうか。やればわかるのですが、2. の計算量がかなり多いのでここで時間を稼ぐ工夫が必要かと思います。また、上のように計算することによって、微分の計算間違えを防ぐこともできます。

2.(1) まず、雨滴の質量は

$$m = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho \ \cdots ①$$

である。ここで、雨滴の質量の微小変化量は、そのときの雨滴の表面積に水蒸気の密度をかけたものであることから次の式が成り立つ。

$$\frac{dm}{dt} = 4\pi a^2 \sigma \ \cdots ②$$

よって ① を ② に代入すれば、

$$4\pi a^2 \rho \frac{da}{dt} = 4\pi a^2 \sigma$$

$$\frac{da}{dt} = \frac{\sigma}{\rho} = k$$

となるから、あとは両辺を $t = 0$ から $t = t$ まで積分して、

$$a = a_0 + kt$$

となる。

(2)$t = 0$ において、$\vec{v} = \vec{v_0}$ とおく。また、雨滴に働く重力は

$$\vec{F} = (0, 0, -\frac{4}{3}\pi a^3 \rho g)$$

だから、系の運動量変化と力積の関係式は

$$\vec{p} - \vec{p_0} = \int_0^t \vec{F} dt$$

$$\frac{4}{3}\pi\rho(a^3\vec{v} - a_0^3\vec{v_0}) = -\frac{4}{3}\pi\rho g \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \int_{a_0}^a a^3 \frac{dt}{da} da$$

$$a^3\vec{v} - a_0^3\vec{v_0} = -\frac{g}{4k}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}(a^4 - a_0^4)$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{g}{4k}(\frac{a_0^4}{a^3} - a)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{a_0^3}{a^3}\vec{v_0} \ \cdots ③$$

となり、$\vec{r}$の満たす微分方程式が得られる。

(3)③ より、

$$\vec{v} = \left(\left(\frac{a_0}{a_0+kt}\right)^3 u, 0, \left(\frac{ga_0}{4k} + w\right)\cdot\left(\frac{a_0}{a_0+kt}\right)^3 - \frac{g}{4k}(a_0+kt)\right)$$

となる。次に$\vec{r} = \displaystyle\int_0^t \vec{v}dt$ に上式を代入して計算すると、

$$\vec{r} = \left(\frac{a_0 u}{2k} - \frac{a_0^3 u}{2k(a_0+kt)^2}, 0, \frac{a_0 w}{2k} + h - \left(\frac{a_0^3 w}{2k} + \frac{ga_0^4}{8k^2}\right)\cdot\frac{1}{(a_0+kt)^2} - \frac{g}{8k^2}(a_0+kt)^2\right)$$

となる。

(コメント) どう考えても (3) の分量がおかしいです。本番では時間が余らない限り$\vec{r}$の計算はしないほうがいいかもしれません。一応間違え防止のために$a = a_0 + kt$を代入するのは最後にして、積分はすべて置換積分でやったほうが、指数の値を書き間違えたりしなくていいかと思います。個人的には (1) のような問題は好きなのですが皆さんはどうでしょうか。きちんと ② を書けましたか。さすがにこれができないと全滅するようなことは防がれていますが、優を狙うのならぜひ取りたい問題ではあります。ちなみにこの問題は 2004 年度の第 2 問としても出題されていますが、こちらでは (1) はなく、問題文中にすでにaの式が与えられています。また、(3) もかなり簡略化されています。おそらく計算量のせいで正答率が低かったのでしょう。

3.「剛体の運動」の問題なので、試験範囲外です。解答も作れません。

一応類題を見たので、最後の問題だけ考察しておくと、

球を突いた点が中心に近かったり遠かったりすると、球はまず滑り出してその後転がる。このとき突く位置が近いか遠いか、中心より上か下かによって最初に摩擦力が働く向きが変わる。丁度いい位置で球を突くと、球は滑ることなく転がる。