

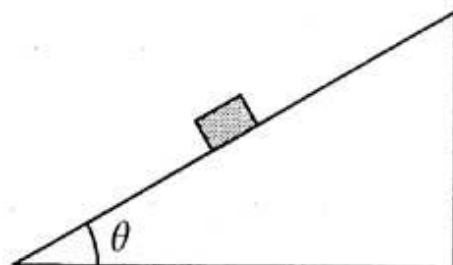
物理学 (力学) 教官名 森松 治 9月1日2時限 試験時間90分
理科I類17-18・25組 解答用紙 両面2枚 計算用紙1枚 持ち
込み不可

1. 図のように、水平面と角度 θ をなす斜面上に質量 m の物体を置く。斜面は左右に動かすことができる。

(1) 斜面と物体の間に摩擦力が働かないとき、物体を斜面上に静止させるためには、斜面をどのように加速させればよいか。

(2) 物体を斜面から引き離すためには、斜面をどのように加速させればよいか。

(3) 斜面と物体の間には静止摩擦係数 μ の摩擦力が働くものとする。すなわち、物体が斜面から受ける垂直な抗力を T とすると、物体と斜面の間には、最大で大きさ μT の抵抗が働くものとする。物体を斜面上に静止させるためには、斜面の加速度がどのような条件を満たせばよいか。



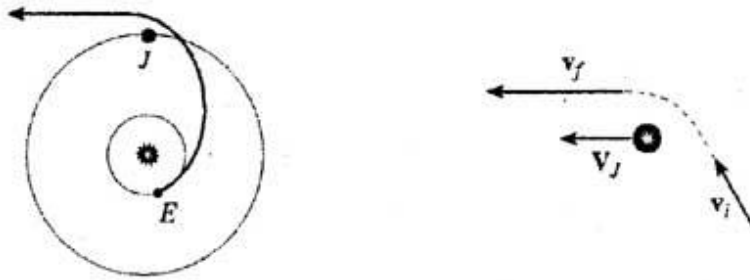
2. NASA が1977年に打ち上げた惑星探査機ボイジャーは、左図のように、木星の重力で加速するスウィングバイを利用して、外部太陽系惑星までの飛行時間を短縮した。スウィングバイの原理について考える。

(1) 右図のように、太陽中心の座標系において、木星によるスウィングバイ前後におけるボイジャーの速度をそれぞれ \vec{v}_i, \vec{v}_f 、木星の速度を \vec{V}_J とすると、

$$|\vec{v}_i - \vec{V}_J| = |\vec{v}_f - \vec{V}_J|$$

が成り立つことを示せ。

(2) v_f が最大となるようにポイジヤーの軌道を決定する。 $V_J = 13\text{km/s}$, $v_i = 16\text{km/s}$, $\theta_i = 60^\circ$ (θ_i は、 \vec{v}_i と \vec{V}_J のなす角) であるとする、最大となる v_f の値はいくらか。



3. 万有引力による惑星の運動を考える。太陽と惑星の間には、万有引力

$$\vec{F}(\vec{r}) = -k \frac{\vec{r}}{r^3} \quad k = GMm \quad r = |\vec{r}|$$

が働くものとする。但し、 G は万有引力定数、 M 、 m は、それぞれ、太陽、惑星の質量 ($M \gg m$)、 \vec{r} は、太陽から見た惑星の位置ベクトルとする。

(1) 惑星は、常に太陽を含むある平面上を運動することを示せ。

(2) 惑星の運動する平面が xy 平面となるように座標軸を取る。このとき、極座標 (r, φ) 、但し、 $(x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi)$ 、を用いて、角運動量保存、エネルギー保存の関係式を表せ。初期条件より、角運動量の大きさは ℓ 、エネルギーは E で与えられるとする。

(3) (2) の結果を用いて、 r の変化する範囲を ℓ 、 E を用いて表せ。

(4) r と φ は、次の微分方程式を満たすことを示せ。

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = \frac{1}{d} \quad d = \frac{\ell^2}{km}$$

(5) (4) 惑星の運動の軌道を求めよ。但し、 $\varphi = 0$ のとき、 r が最小になるものとする。