

東京大学教養学部(前期)

2008 年度夏学期講義

基礎統計(福地 純一郎)シケプリ

(第二次改訂版)

---はじめに---

このシケプリは、2008 年度版 基礎統計(福地純一郎:木4)のシケプリです。

《試験について ~福地さんから直接話を聞いたうえでの考察~》

福地さんは、駒場に来てから2年目である為、問題の傾向がつかみづらいのですが、昨年は計算問題中心の問題構成だったようです。しかし、今年から、教科書等の持込が全面禁止になったので公式は完全に覚えなければなりません。

なお、試験問題は本年も計算問題中心ではありますが、1~2問程度、仮説検定などの論述問題も入る可能性があるので注意してください。(公式の証明問題の可能性は比較的低いか??)

昨年度は持ち込み可だったせいか、問題量が異常に多かったようです。今年はその心配をする必要はないようですが、試験範囲は昨年よりも広がっているので、必然的に問題の難易度は増すでしょう。

試験には必ず四則演算と平方根の計算のできる電卓が必要ですので用意しましょう。また、それよりはるかに高機能な関数電卓でも可です(たとえ問題が解きやすくなったとしても・・・)。

《今回のシケプリの昨年度版からの変更点》

- ・ 昨年のシケプリに載せられていない必要な内容を加え、昨年のプリントの中で一部不要なものを除く
- ・ 理解を助けるために、公式や理解の困難な部分に関しては、できる限りその証明・数学的説明を記述し、証明のポイント、計算の流れなどを分かりやすいように記述する(この結果、説明が煩雑になってしまっています。「証明・説明」欄に関しては、ポイントをつかむ程度で、あとは読み飛ばしても構わないと思います。)
- ・ 見やすいように、デザイン・レイアウトを一新する

なお、このシケプリは、授業で配られたプリント・昨年度のシケプリをベースに作られています。

理解不能な点がありましたら修正しますのでお申し付けください。

最後に、本シケプリ制作において、情報提供をしてくれた瀧内先輩に感謝の意を表します。

2008 年度入学 理科1類20組シケ対 熊谷・砂川

- 目次 -

| | |
|--|-----------|
| 第1章 統計学の基礎 | 3 |
| 統計とは・・・ / 全数調査と標本調査 | |
| 第2章 1次元のデータ | 4 |
| 度数分布表とヒストグラム / 代表値 / 分散と標準偏差 / 一次変換・標準化 | |
| 第3章 2次元のデータ | 9 |
| 2次元データ / 相関係数 / 回帰式のあてはめ | |
| 第4章 確率 | 11 |
| 確率の概念 / 条件付き確率と独立性 | |
| 第5章 確率変数 | 14 |
| 確率変数・確率分布 / 期待値 / 分散と標準偏差 / 連続型確率変数 / 累積分布関数 | |
| 第6章 確率分布 | 20 |
| 正規分布 / 正規分布の性質 | |
| 第7章 多次元の確率分布 | 23 |
| 同時確率変数 / 共分散と相関係数 / 確率変数の独立性 | |
| 第8章 大数の法則と中心極限定理 | 27 |
| 大数の法則 / 中心極限定理 (省略) | |
| 第9章 標本分布 | 29 |
| 標本抽出による調査とは / 標本分布 | |
| 第10章 正規分布からの標本 | 33 |
| χ^2 分布 / t分布 | |
| 第11章 推定 | 34 |
| 分散が既知のときの標本平均の標本分布 / 標本分散の標本分布 / 分散が未知のときの標本平均の標本分布 | |
| 第12章 仮説検定 | 37 |
| 平均値の検定 (母分散が既知の場合) / 棄却域・有意水準 / 平均値の検定 (母分散が未知の場合) / 平均値の差の検定 / いろいろの χ^2 検定 | |
| 付録1 (標準) 正規分布表の読み方 | 47 |
| 付録2 t分布表の読み方 | 48 |

第1章 統計学の基礎

この内容は、ざっと読んである程度理解すればよい。

1.1 統計とは・・・・・・・・

統計とは、「ある目的をもって一定の条件（時間・空間・標識）で定められた集団を対象に、調べ集めたデータを集計、加工して得られた数値」のこと。

《特徴》

- 1) 架空のものではなく、存在が明確に規定された具体的な集団を対象とする。
- 2) 集団を構成する各個体の特定の性質（＝標識）を数値としてとらえ、集団的に把握する。

2) 統計的規則性

個々にはばらばらになっていて特徴的な傾向や規則性が見えない現象でも、集団として見た場合、さまざまな傾向や規則性が浮かび上がる。これを統計的規則性という。

統計学とは、

- 1) 適切なデータを用いて分析を行い、結論を導く方法
- 2) 不確実性（ばらつき）のある現象についての仮説を検証する方法 である。

1.2 全数調査と標本調査

- ・ **全数調査**・・・集団の性質を調べるために、集団を構成するすべての個体について調査する。
- ・ **標本調査**・・・すべての個体を調査するのではなく、一部のみを調査する方法。母集団から無作為に、あるいは一定の抽出法により、標本を選出し、調査する。（標本調査・サンプル調査）

| | 全数調査 | 標本調査 |
|-----|---------------------------|--------------------------------------|
| 調査法 | 集団を構成する個体すべてを調査 | 集団の一部のみを調査 |
| 例 | ・ 国勢調査 ・ 事業所・企業統計調査 など | ・ 家計調査 など |
| 長所 | ・ 結果の信頼性が大きい | ・ 費用が小さい ・ 調査に要する時間が少ない |
| 短所 | ・ 費用が大きい ・ 調査に要する時間が長い | ・ 誤差が伴う ・ 偏った標本で集計すると偏りのある数値が得られる |

国勢調査：5年に1度、総務省統計局により実施。大規模調査と簡易調査がある。人口の把握などが目的。

家計調査：毎月、世帯などを対象として、家計の収入・支出、貯蓄・負債などを調査。層化三段抽出法で標本を抽出。調査結果は景気動向の把握などの基礎資料として利用。

標本調査に関連する内容は、あとで詳しく触れる。（第9章～）

第2章 1次元のデータ

2.1 度数分布表とヒストグラム

統計分析の第一歩として、データがどのように分布しているかを知ることが大事である。**度数分布表とヒストグラム**はそのための便利な道具である。

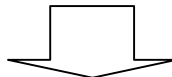
度数分布表とは、階級1区分あたりのデータの個数（度数）を階級順に並べたもの。ヒストグラムとは、柱状のグラフのこと。ヒストグラムは底辺を階級区間に一致させ、柱の面積が度数と比例するように書く。次のように作成の手順を踏む。

1. データ数が比較的少ないときは、大きさの順に並べると見やすい。
2. 階級区分を設けて、各階級に属するデータを数える。
3. 度数分布表・ヒストグラムを作成する。

例1 度数分布表・ヒストグラム

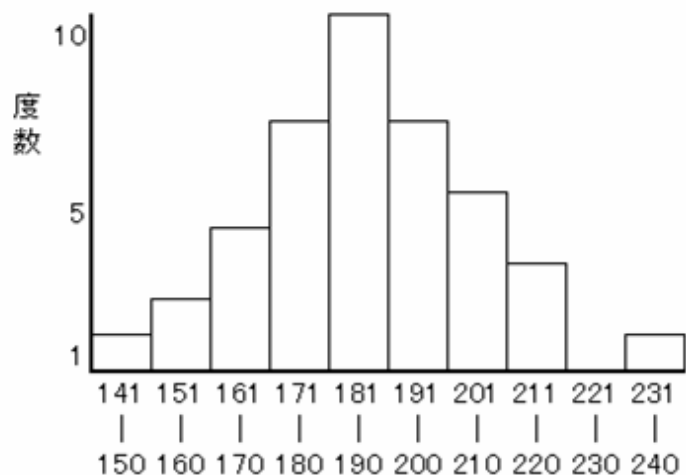
以下のデータが与えられたときは・・・

| | | | | | | | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 211 | 151 | 187 | 170 | 188 | 164 | 193 | 186 | 181 | 176 | 206 | 184 |
| 172 | 200 | 192 | 185 | 220 | 209 | 173 | 143 | 199 | 233 | 167 | 177 |
| 203 | 164 | 171 | 190 | 158 | 198 | 178 | 207 | 190 | 188 | 194 | 218 |
| 202 | 179 | 200 | 185 | | | | | | | | |



度数分布表（左）・ヒストグラム（右）が作れる。

| 階級 | 度数 | 相対度数 |
|---------|----|-------|
| 141-150 | 1 | 0.025 |
| 151-160 | 2 | 0.050 |
| 161-170 | 4 | 0.100 |
| 171-180 | 7 | 0.175 |
| 181-190 | 10 | 0.250 |
| 191-200 | 7 | 0.175 |
| 201-210 | 5 | 0.125 |
| 211-220 | 3 | 0.075 |
| 221-230 | 0 | 0.000 |
| 231-240 | 1 | 0.025 |



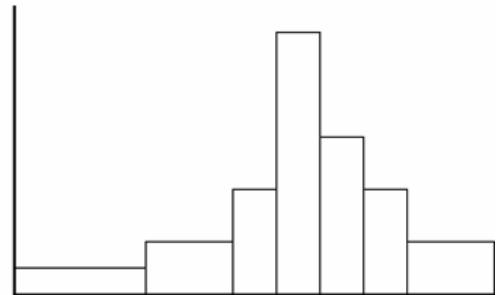
階級はデータのとる値、**度数**は指定された階級区間におけるデータの個数、**相対度数**は度数全体に対する指定された階級区間の度数を占める割合を表す。

度数分布表を柱状グラフに起こしたものが、**ヒストグラム**である。この際、**階級幅**（上のヒストグラムでいう、141-150、151-160 とかという範囲のことです）の設定には、注意する必要がある。**階級幅**が大きすぎたり小さすぎたりすると、データの特徴が見えなくなってしまうからだ。

一般に、階級幅は均等にとられるが、社会・経済現象などのデータの場合、一部分の区間の度数が極端に大きいことがある。このようなときには、度数の大きい区間の階級幅を狭め、度数が小さくなるのにしたがって、階級幅を広くとる手法が用いられる。この場合、度数をヒストグラムの面積に比例させるため、

$$\text{階級幅調整済度数} = \text{度数} \times \frac{\text{最小の階級幅}}{\text{階級幅}}$$

を各階級について計算し、これを各階級の柱の高さとする。右図のような感じになる。



2.2 代表値

分布を代表する値のこと。平均 (= ミーン) ・ メディアン ・ モードなどがある。

平均 (ミーン)

公式 2-1 平均の定義

x_1, x_2, \dots, x_n についての平均 \bar{x} は次のように定義される：

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

《特徴》・外れ値 (度数分布において、度数が最も多い区間から離れたところに、存在する値) による影響を受けやすい。

メディアン

公式 2-2 メディアンの定義

データ x_1, x_2, \dots, x_n を値の小さいものから大きさの順に並べ替えたものを

$x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$ で表すと、メディアンは、 m を任意の自然数として、

$$x = 2m + 1 \text{ のとき } x_{(m+1)}, \quad x = 2m \text{ のとき } \frac{x_{(m)} + x_{(m+1)}}{2} \text{ で定義される。}$$

例) データが 1, 1, 2, 4, 16 であるときのメディアンは 2 である。

データが 1, 1, 2, 4, 5, 16 であるときのメディアンは 2 と 4 の平均をとって 3 である。

《特徴》・外れ値による影響が少ない。

モード

度数分布表で、度数が最大である階級の階級値がモード。

《特徴》・データの分布で（この後略図を示します）峰が2つある場合は、有効ではない。
・階級幅のとり方によって違いが生じる。

平均・メディアン・モードの関係

（右図の度数分布において一番山になっているところが峰である。）

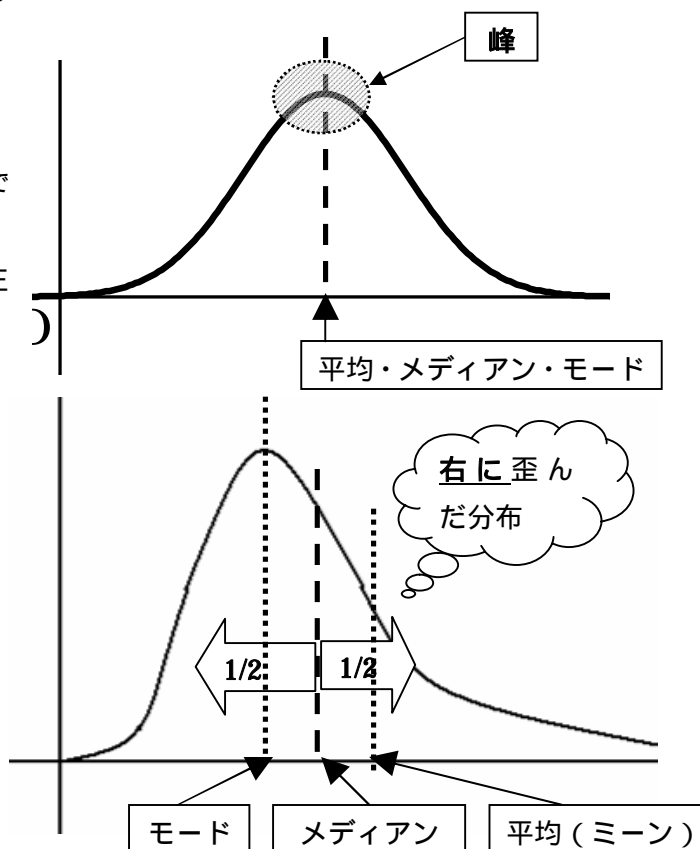
右図のように峰が一つであり、分布が完全に左右対称の場合、この3つは完全に一致する。

右図のように、右に歪んだ分布（峰が左に偏った分布）では、一般的に平均、メディアン、モードの順に値が小さくなる。

Mean > Median > Mode で、辞書と同じ順で並ぶと覚える！！

注意 右に歪んだ分布とは、左に峰が偏った分布です。覚え間違いに注意！！

ちなみに、左に歪んだ分布ではこの逆となる。



2.3 分散と標準偏差

代表値だけではデータの分布の様子を決定することはできない。そこで、分散と標準偏差という散らばりの尺度を用いる。以下にその定義を示す。

公式 2-3 分散・標準偏差の定義

$$\text{分散} : S^2 = \frac{1}{n} \left\{ (x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2 \right\} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

$$\text{標準偏差} : S = \sqrt{S^2}$$

と定義する。（注： \bar{x} は平均である。）

分散は2乗の値であるため、単位が元のデータの単位の2乗になってしまう。このため、この値の正の平方根、すなわち標準偏差を散らばりの尺度として用いることが多い。

また、実際に分散を求めるときは、次の式を用いると計算が楽である。

公式 2-4 分散の式の簡略型

$$S^2 = \frac{1}{n} (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) - (\bar{x})^2 = \frac{1}{n} \left\{ \sum_{i=1}^n x_i^2 \right\} - (\bar{x})^2$$

証明

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2\bar{x}x_i + \bar{x}^2) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2 \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right) \bar{x} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{x}^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x}^2 + \bar{x}^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2 \end{aligned}$$

第 2 項に

$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}$ を代入

(証終)

ポイント

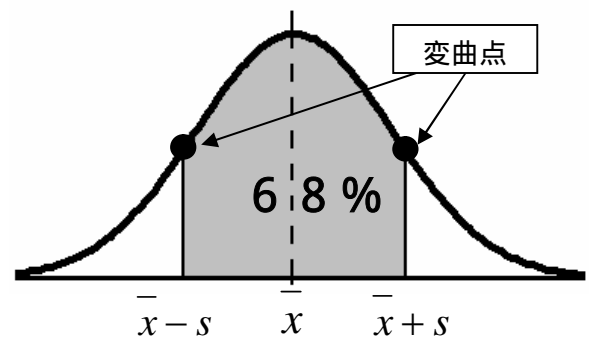
ベル型の分布

右図のような分布をベル型の分布という。
人間の特性値（身長・体重など）、大規模な試験の点数分布、実験などの測定誤差の分布などはベル型に近いことが知られている。

右図のように、ベル型の分布では、平均の位置から 1 標準偏差離れた点に変曲点が位置している。

また、平均から ± 1 標準偏差の区間、

すなわち $[\bar{x}-s, \bar{x}+s]$ に全度数の約 68% が含まれている。



2.4 一次変換・標準化

データのすべてに同じだけ定数を掛け、定数を足す作業を 1 次変換という。1 次変換の際、次の式が成り立つ。

公式 2-5 一次変換の際の関係式

データ x_1, x_2, \dots, x_n について、 $z_i = ax_i + b$ のように一次変換をする。

このときの平均・分散・標準偏差の値は、それぞれ

$$\begin{aligned} \text{(ア)} \quad \bar{z} &= a\bar{x} + b & \text{(イ)} \quad S_z^2 &= a^2 S_x^2 \\ \text{(ウ)} \quad S_z &= |a| S_x & & \text{となる。} \end{aligned}$$

証明

$$\text{(ア)} \quad \bar{z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i$$

ポイント

\bar{z} の定義。

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (ax_i + b)$$

上での定義
 $z_i = ax_i + b$ を代入

$$= a \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n b$$

$$= a\bar{x} + b$$

第 1 項は \bar{x} の定義を用い
 変形

(証終)

$$(イ) S_z^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^2$$

S_z^2 の定義。

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \{ax_i + b - (a\bar{x} + b)\}^2$$

上での定義
 $z_i = ax_i + b$ を代入

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \{a(x_i - \bar{x})\}^2$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a^2 (x_i - \bar{x})^2$$

$$= a^2 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

$$= a^2 S_x^2$$

S_x^2 の定義より。

(証終)

(ウ) $S_z^2 = a^2 S_x^2$ の正の平方根をとれば、

$$S_z = |a| S_x \text{ を得る。}$$

(証終)

ちなみにこのようなデータの変換は、為替レートなどに使用される。

標準化

公式 2-6 標準化

特に、データ x_1, x_2, \dots, x_n について、 $z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{S_x}$ のように一次変換をすることで、

$\bar{z} = 0$ 、 $S_z^2 = S_x^2 = 1$ と変換できる。これを標準化という。

標準化された値は、各観測値が平均から正負どちらの方向に、標準偏差の何倍離れているかを示しているのである。標準化されたデータを見ることによって、個々の観測値の相対的な位置を知ることが出来る。

(参考) 偏差値は、「(標準化された値) × 10 + 50」で算出される値である。

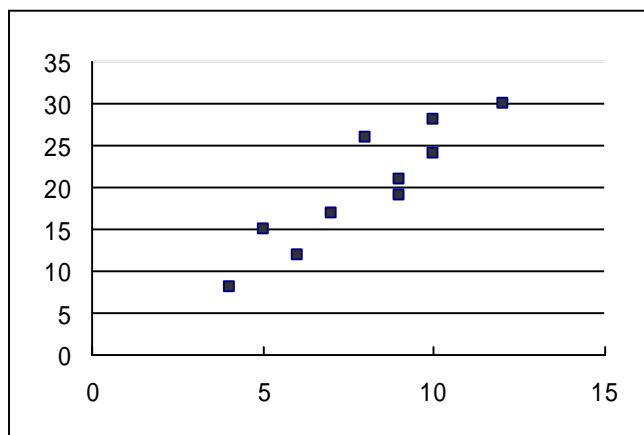
第3章 2次元のデータ

3.1 2次元データ

観測対象の個体に対して、2変数 x, y を観測して n 組のデータを得る場合、そのデータを2次元データという。

2次元データの分析には、右図のような散布図が用いられることが多い。

右の散布図は、横軸に家賃、縦軸に占有面積をとって表現した、2次元データの散布図である。



3.2 相関係数

2つの変数の間に直線関係に近い傾向が見られるとき、その2つの変数に「相関関係がある」という。特に、一方の変数が増加するときに他方の変数も増加する傾向を「正の相関関係がある」、減少する傾向を、「負の相関関係がある」という。

また、(上の散布図の点の集まり方が)直線的な傾向をもつ度合いを、直線的な傾向の度合いが「強い」、「弱い」と表現する。

このような相関関係を調べる有効な手段として、相関係数を用いる方法が挙げられる。

相関係数

データ x_1, x_2, \dots, x_n および y_1, y_2, \dots, y_n 標準化した値

$$\frac{x_1 - \bar{x}}{S_x}, \frac{x_2 - \bar{x}}{S_x}, \dots, \frac{x_n - \bar{x}}{S_x} \text{ および } \frac{y_1 - \bar{y}}{S_y}, \frac{y_2 - \bar{y}}{S_y}, \dots, \frac{y_n - \bar{y}}{S_y}$$

を用いて、次のように x と y の相関係数 r が定義される。(S_x, S_y はそれぞれ x, y の標準偏差)

公式 3-1 相関係数

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \bar{x}}{S_x} \right) \left(\frac{y_i - \bar{y}}{S_y} \right) = \frac{1}{S_x S_y} \times \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \\ &= \frac{S_{xy}}{S_x S_y} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} \end{aligned}$$

上の式で登場した、 S_{xy} のことを、 x, y の**共分散**という。(ともすると、相関係数 r は x, y を、それぞれ標準化した値の共分散ということがわかるだろう。)

《相関係数の特徴》

- ・ 常に、 $-1 \leq r \leq 1$ が成り立つ。
- ・ x, y の間に正の相関があるとき $r > 0$ 、負の相関があるとき $r < 0$ 。
- ・ すべてのデータが直線上にあるとき、 $r = +1$ あるいは $r = -1$ である。このとき、それぞれ「 x と y が**正の完全相関**である」「**負の完全相関**である」という。

注意例え $r = \pm 0.5$ であったとしても、半分くらいの相関関係があるとは考えにくい。 $r = \pm 0.5$ 程度であれば、相関関係は限りなく小さいとするのが妥当である。

3.3 回帰式のあてはめ

2つの間にある程度の直線的関係があると認められる場合、**回帰分析**を行うことが有効である。回帰分析とは、**ほぼ直線的な関係が認められる2つのデータ**について、

まず、因果関係の原因となる変数を x (**独立変数、説明変数**)、因果関係の結果となる変数を y (**従属変数、被説明変数**)をおき、

それらのデータを散布図上に並べることとして、そのデータを近似できる直線の式を求め、分析を行う手法である。

の作業はとりわけ重要である。前頁の散布図の例では、占有面積を独立変数、家賃を従属変数とおくべきである。

最小二乗法

ここでの直線の式の求め方として、**最小二乗法**を用いる。これは、 n 個の点 (x_i, y_i) から、直線 $y = a + bx$ への垂直の二乗和を L とすると、

$$L = \{y_1 - (a + bx_1)\}^2 + \dots + \{y_n - (a + bx_n)\}^2 = \sum_{i=1}^n \{y_i - (a + bx_i)\}^2$$

を最小にする a, b を求める方法である。 a, b の値は以下の式で求められる。

公式 3-2 回帰式

近似式 $y = a + bx$ について、

$$a = \bar{y} - b\bar{x} \quad , \quad b = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{S_{xy}}{S_x^2} \quad \text{である。 (注: } S_{xy} \text{ は共分散)}$$

証明は授業で扱っておらず、多分難解なので割愛します。

上式によって得られた a, b による一次式 $y = a + bx$ は**回帰直線 (回帰式)**と呼ばれる。

第4章 確率

4.1 確率の概念

さいころを投げたりするような、同じ条件のもとで繰り返し行うことができる実験や観測を試行といい、試行の結果として起こる事柄を**事象**という。

1個のさいころを投げる試行において、「1か2の目が出る」という事象を A とすると、 $A = \{1, 2\}$ のように表せる。このとき、1, 2 は A の**要素**と呼ばれる。また、 A の要素の個数を $\#A$ で表す。

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ は「1から6の目が出る」という事象で、さいころの出る目のすべての事象の集合であるから、**全事象**あるいは**標本空間**と呼ばれる。 Ω は必ず起こる事象であり、 A は Ω の部分集合である。 Ω 内の要素： $\omega = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ は**標本点**と呼ばれる。 Ω のひとつひとつの要素からなる集合 $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$ は、それ以上細かく分けることができない。これらの事象を**根元事象**という。

また、「何も起こらない」とする集合を**空事象** ϕ で表す。

集合には演算も使用される。演算については次のように定義される：

- ・ **積事象** $A \cap B$: A かつ B が起こる事象
- ・ **和事象** $A \cup B$: A または B が起こる確率
- ・ **補事象** A^c : 事象 A が起こらないとする事象

$A \cap B$ が空集合のときに、「 A と B は互いに排反である」という。

さて、**確率**とは、事象の起こる「確からしさ」を数値で表したものであり、次のように求められる：

1. 起こりうる結果が有限個で、それぞれ可能性が同様に確からしいとき（例えばさいころを投げる試行）事象 A に属する要素の個数を標本点の個数で割ったものを事象 A の確率とする。つまり、その事象 A の起こる確率を $P(A)$ とすると、

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} \dots \dots \dots \text{等可能性の原理}$$

2. 等可能性の原理による方法が適用できないとき（例えば将棋の駒や画びょうを投げる試行）事象 B が起こる回数を試行の回数で割った比率を事象 B の確率の近似値とする。

以上どちらの方法で確率の値を決定しても、確率 $P(\cdot)$ は次の3つの性質を持つ。

- (C1) 任意の事象 A に対して $0 \leq P(A) \leq 1$
- (C2) 標本空間 Ω に対して、 $P(\Omega) = 1$ 、**空事象** ϕ について、 $P(\phi) = 0$
- (C3) A と B が互いに排反ならば $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

以上3つの条件を**確率の公理**という。現代数学では、確率の公理をみたせば、 $P(\cdot)$ は確率であると定義する。

確率の公理から、次のような性質を導くことができる。

公式 4-1 確率の性質

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

$$A \subset B \text{ ならば、 } P(A) \leq P(B)$$

$$\text{任意の事象 } A, B \text{ に対して、 } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

..... 確率の加法定理

$$A_1, A_2, \dots, A_n \text{ が互いに排反ならば、 } P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + \dots + P(A_n)$$

4.2 条件付き確率と独立性

条件付き確率

赤玉 3 個と白玉 2 個が入っている袋から、1 個ずつ 2 回玉を取り出す試行を考える。

この試行において、1 回目に赤玉が出るという事象を A 、2 回目に赤玉が出るという事象を B とする。ただし、取り出した玉はもとに戻さないとする。

このとき、1 回目に赤玉が出たときに 2 回目に赤玉が出る確率は $\frac{2}{4}$ である。このような確率を、事象 A が起こったときに事象 B が起こる条件付き確率という。これを $P(B|A)$ で表す。

上の例では、 $P(B|A)$ が簡単に求めたが、等可能性原理が使えないような場所では違う方法で計算することが必要になる。

いま、標本空間 Ω は $5 \times 4 = 20$ 個の要素から成る。事象 A は $3 \times 4 = 12$ 個、事象 $A \cap B$ は $3 \times 2 = 6$ 個の要素から成る。 A が起こったときに B の起こる条件付き確率は、 A を新たに標本空間と考え、その標本空間の中で B も起こる確率だから、条件付き確率の定義は次式で与えられる。

公式 4-2 条件付き確率の定義

A が起こったときに B の起こる条件付き確率は、

$$P(B|A) = \frac{\#A \cap B}{\#A} = \frac{\frac{\#A \cap B}{\#\Omega}}{\frac{\#A}{\#\Omega}} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

これは等可能性原理の使えないときでも成り立つ。また、これを变形すると、

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

となる。これを乗法公式と呼ぶ。

また、 $P(B) > 0$ のとき、

$$P(B \cap A) = P(B)P(A|B)$$

もまた成り立つ。

独立性

2つの事象 A, B について、 $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ が成り立つとき A, B は互いに独立であるという。この条件は、 $P(A) > 0$ のとき、

$$P(B|A) = P(B)$$

と同等である。上式は、事象 A が起こるという条件を加えても、事象 B の確率は変わらないことを意味している。

3つの事象 A, B, C について、

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)、P(A \cap C) = P(A)P(C)、P(B \cap C) = P(B)P(C)、$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$$

のすべてが成り立つとき、 A, B, C はすべて独立であるという。事象が4つ以上の場合も同様に定義する。

第5章 確率変数

この分野は、きっちり理解しないと後でこんがらがることがあるので注意。

5.1 確率変数・確率分布

具体的な現象の確率について分析する際には、**確率変数 (rv)** と **確率分布** という2つの概念が基本として使われる。

確率変数とは、それ自体がある値(事象)をとった際に、その値をとる確率も同時に定義される変数のことをいう。(ここで、確率変数を X としたとき、 X 自体は事象の値を示すことに注意。付随して定義される確率は、 $P(X)$ などと表記される。)

離散型確率分布

次に、確率分布について。ここでは**離散型確率分布**について説明する。(連続型確率分布については5章4節参照)

不連続な値をとる確率変数を**離散型(的)確率変数**という。さいころの目、コインの表裏などがその例である。

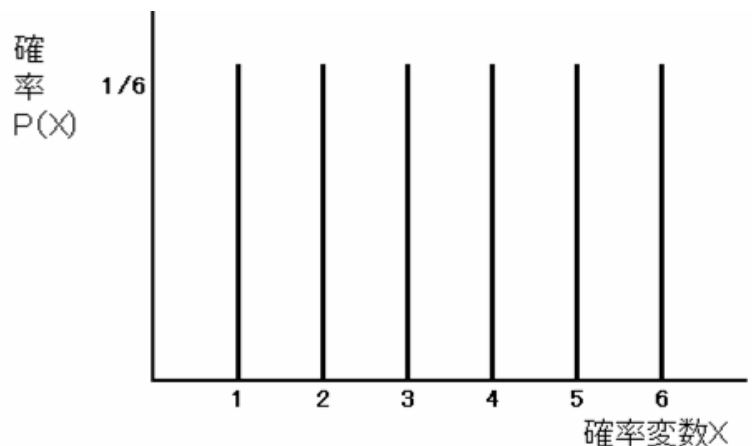
離散型確率変数 X を考える。 X のとりうる値が $\{x_1, x_2, \dots\}$ であるとしたとき、 X がそれぞれの値をとる確率は次式で与えられる。

$$P(X = x_k) = f(x_k) \quad (k = 1, 2, \dots)$$

これを X の**離散型確率分布**という。

一般に、確率分布は表やグラフで表されることが多い。下に、一つのサイコロを振ったときに出る目の確率分布を、表(左)・グラフ(右)で示す(確率変数は X とする)。

| 出る目 X | 確率 $P(X)$ |
|---------|-----------|
| 1 | 1/6 |
| 2 | 1/6 |
| 3 | 1/6 |
| 4 | 1/6 |
| 5 | 1/6 |
| 6 | 1/6 |



また、上のような確率分布のように、すべての事象の確率が等しい確率分布を、**離散型一様分布**という。

5.2 期待値

離散型確率変数の期待値は、以下のように定義できる。

公式 5-1 期待値の定義

X を離散型確率変数とし、とりうる値を x_1, x_2, \dots, x_k とする。また、 $X = x_i$ のときの確率を $p_i = p(x_i)$ とすると、このとき、

$$E(X) = \sum_{i=1}^k x_i p(x_i) \quad \text{を } X \text{ の期待値あるいは平均という。}$$

確率変数の関数の確率分布と期待値

X が離散型確率変数であれば、その関数 $g(X)$ も離散型確率変数である。 $Y = g(X)$ とし、かつ Y は 1 通りの異なる値 y_1, y_2, \dots, y_l をとると仮定すると、

$$E[g(X)] = \sum_{j=1}^l y_j p(y_j)$$

である。すなわち、一般に $g(X)$ の期待値を求めるには、 $g(X)$ の確率分布を求めてから上の期待値の定義(公式 5-1)を用いればよい。しかし、わざわざ確率分布を計算しなくとも、実際には次の形の式で計算する方がより簡単である場合が多い。

公式 5-2 確率変数の関数の期待値(簡略型)

$$E[g(X)] = \sum_{i=1}^k g(x_i) p_i$$

この公式が、上で行われている期待値を求める手順を一気を実現させていることは、式の形を見れば明らかであろう。証明は授業で扱っていないので省略する。

期待値の性質

公式 5-3 期待値の性質

c は定数とする。

$$(ア) \quad E(c) = c$$

$$(イ) \quad E(X + c) = E(X) + c$$

$$(ウ) \quad E(cX) = cE(X)$$

$$(エ) \quad 2 \text{ つの関数 } g, h \text{ に対して、} E[g(X) + h(X)] = E[g(X)] + E[h(X)]$$

次のページにこれらの証明を記す。

| | | |
|-----------|--|-------------|
| 証明 | <p>(ア)・(ウ)は自明であるため省略する。</p> <p>(イ) $E(X + c) = \sum_{i=1}^k (x_i + c)p_i$</p> <p style="margin-left: 40px;">$= \sum_{i=1}^k x_i p_i + \sum_{i=1}^k c p_i$</p> <p style="margin-left: 40px;">$= E(X) + c \sum_{i=1}^k p_i$</p> <p style="margin-left: 40px;">$= E(X) + c$</p> <p style="text-align: right;">(証終)</p> <p>(エ) $E[g(X) + h(X)] = \sum_{i=1}^k \{g(x_i) + h(x_i)\} p_i$</p> <p style="margin-left: 40px;">$= \sum_{i=1}^k g(x_i) p_i + \sum_{i=1}^k h(x_i) p_i$</p> <p style="margin-left: 40px;">$= E[g(X)] + E[h(X)]$</p> <p style="text-align: right;">(証終)</p> | ポイント |
| | <p>← 期待値の定義。 (公式 5-1)</p> <p>← 第 1 項は期待値の定義による。</p> <p>← 第 2 項は、 $\sum_{i=1}^k p_i = 1$ による。すな わち、全事象の確率は 1 というわけ。</p> <p>← 期待値の定義。</p> <p>← 期待値の定義。</p> | |

5.3 分散と標準偏差

確率変数がどのくらいばらつくのかを測る特性値として、確率変数の**分散**がよく使われる。X の分散は次のように定義される。

公式 5-4 分散の定義

$$V(X) = E[(X - E(X))^2] \quad (= \sigma^2 = \sigma_X^2)$$

ここで、 $g(x) = (x - \mu)^2$ (x および $x_1 \cdots x_i \cdots x_k$ は確率変数 X がとりうる値、 μ は X の期待値)

とにおいて、公式 5-1(期待値の定義)を用いれば、X の分散は次式で計算することができる。

公式 5-5 分散の式の変形

$$V(X) = (x_1 - \mu)^2 p_1 + \cdots + (x_k - \mu)^2 p_k = \sum_{i=1}^k (x_i - \mu)^2 p_i$$

さらに、公式 5-3(期待値の性質)(エ)より、X の分散は次のようにも書ける。

公式 5-6 分散の式の変形

$$V(X) = E(X^2) - \mu^2$$

証明

$$\begin{aligned} V(X) &= E((X - \mu)^2) \\ &= E(X^2 - 2\mu X + \mu^2) \end{aligned}$$

ポイント

$\mu = E(X)$ であることに終始注意して式を眺めてください。

$$\begin{aligned}
&= E(X^2) - E(2\mu X) + E(\mu^2) \quad \leftarrow \text{公式 5-3 (エ) を用いて展開。} \\
&= E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2 \quad \leftarrow \text{第 2 項は公式 5-3 (ウ)、第 3 項は公式 5-3 (ア) による。} \\
&= E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 \\
&= E(X^2) - \mu^2
\end{aligned}$$

(証終)

また、単位をそろえるために分散の正の平方根をとったものを考え、これを標準偏差とする。

公式 5-7 標準偏差

$$D(X) = \sqrt{V(X)} \quad (= \sigma = \sigma_X)$$

確率変数の期待値・分散・標準偏差の表現はいくつかある。どの記号が試験にでてもいいように、しっかり覚えておくこと。

分散・標準偏差の性質

公式 5-8 分散・標準偏差の性質

a, b は定数であるものとする。確率変数 X について、

(ア) $V(a) = 0$

(イ) $V(aX + b) = a^2 V(X)$ (ウ) $D(aX + b) = |a| D(X)$ が成り立つ。

証明

(ア) $V(a) = E\left[\{a - E(a)\}^2\right] \quad \leftarrow \text{分散の定義。}$
 $= \{a - E(a)\}^2 \quad \leftarrow \text{公式 5-3 (ア) 利用。}$
 $= 0$

(証終)

(イ) $V(aX + b) = E\left[\{(aX + b) - E(aX + b)\}^2\right] \quad \leftarrow \text{分散の定義。}$
 $= E\left[\{(aX + b) - (aE(X) + b)\}^2\right] \quad \leftarrow \text{中カッコ内第 2 項は、公式 5-3 (イ)・(ウ) による。}$
 $= E\left[\{aX - aE(X)\}^2\right]$
 $= E\left[a^2 (X - E(X))^2\right]$
 $= a^2 E\left[(X - E(X))^2\right] \quad \leftarrow \text{公式 5-3 (ウ) による。}$
 $= a^2 V(X) \quad \leftarrow \text{分散の定義。}$

(証終)

(ウ) $V(aX + b) = a^2 V(X)$ ((イ) 式) の正の平方根をと

れば、 $D(aX + b) = |a| D(X)$ を得る。 (証終)

ポイント

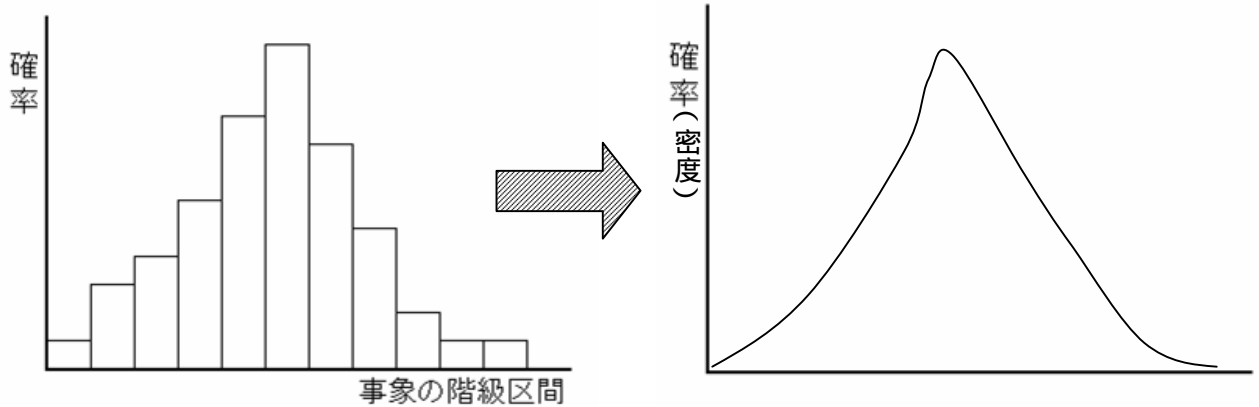
ここまで見てきた期待値・分散の性質から、確率変数は1次元のデータ(第2章)で扱った方法で1次変換・標準化が可能である。

5.4 連続型確率変数

連続した値をとる確率変数のことを連続型確率変数という。身長・体重・気温・為替レートなどがその例である。

注意 値が離散的である場合でも、値の間隔が無視できるほど小さい場合は、連続型確率変数として扱うことがある。

連続型確率変数について、横軸に確率変数の値、縦軸にその確率をとって、ヒストグラムに表すことを考える。



ここで、ヒストグラムの階級区間を極限まで狭めていくと、ヒストグラムが上右図のような曲線で近似できることがわかるだろう。この曲線を表す関数のことを、確率密度関数(pdf)という。と同時にこれは、連続型確率分布をグラフ化したものともいえる。これを式で定義すると、次のようになる。

公式 5-9 確率密度関数の定義

a, b 任意の定数とする ($a < b$)。ある確率変数 X について、 $a < X < b$ である確率が、条件をみだすどんな a, b でも、常に次式

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx$$

ここで注意して欲しいのは、上の式から分かるように、連続型確率分布では、確率変数がある1つの値をとる確率は0となる。(上の式に $a = b$ を仮に代入してみれば分かるだろう。) 連続型確率分布の確率は、確率変数を X とすれば、 X がある区間内の値である確率として定義される。 グラフでは確率は面積として与えられる。例えば、 X の確率密度関数が $f(x)$ のとき、 $a < X < b$ となる確率は $f(x)$ のグラフ・直線 $x = a, x = b$ および x 軸で囲まれた領域の面積で与えられるのである。

ちなみに、連続型確率変数の期待値と分散は次のように定義できる。

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx \quad V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 f(x) dx$$

期待値と分散の性質については、連続型確率変数についても、離散型確率変数と同様のものが成り立つ。

証明は難解であり、授業で扱っていないので省略します。

5.5 累積分布関数

確率変数 X について、累積分布関数を次のように定義する。

公式 5-10 累積分布関数の定義

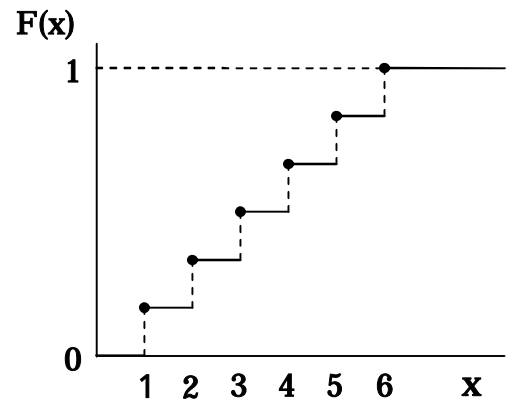
$$P(X \leq x) = F(x)$$

この関数 $F(x)$ を X の累積分布関数と定義する。

これは、確率変数が離散型であっても、連続型であっても定義できる。ここで注意しておきたいのは、累積分布関数の値域は 0 から 1 であることである。

離散型確率変数の場合

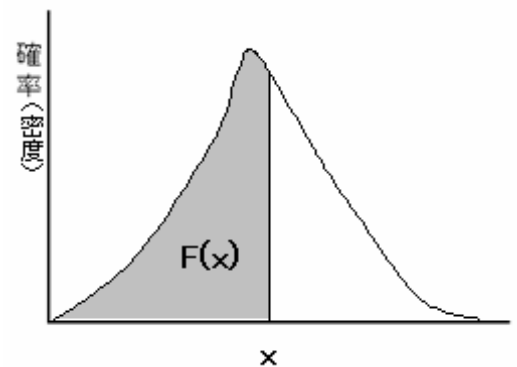
離散型確率変数の場合、累積分布関数は不連続な関数となる。例えば、さいころの出る目の確率について、累積分布関数のグラフを図示すると、右図のようになる。



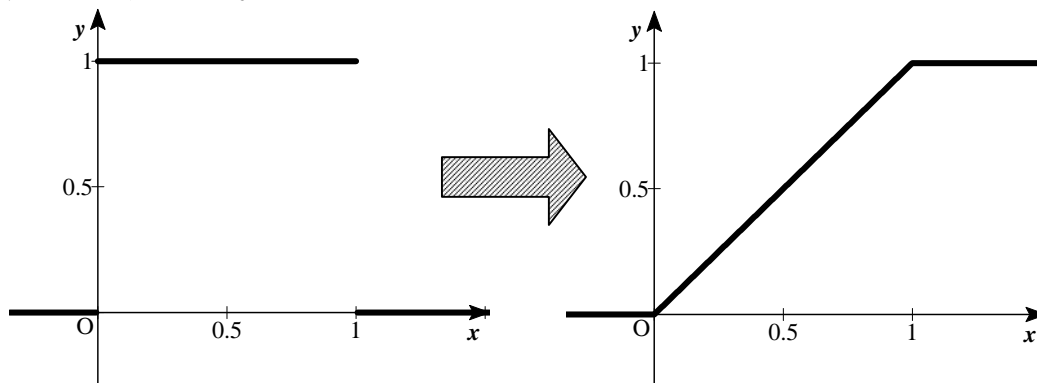
連続型確率変数の場合

連続型確率変数の場合、累積分布関数は連続な関数になることが多い。また、累積分布関数は、確率密度関数における、右図のような灰色部分の面積としても定義できる。

例えば、確率密度関数 $f(x) = \begin{cases} 1 & (0 \leq x \leq 1) \\ 0 & (x < 0, 1 < x) \end{cases}$ を考える



と、確率密度関数のグラフ(左)・累積分布関数(右)のグラフは、下のようになる。



ちなみに、このようにある区間で、一定の値をとる確率分布を、一様分布という。累積分布関数はあとで度々出てくるので、概念だけでも覚えておいてもらいたい。

第6章 確率分布

6.1 正規分布

統計学のなかで最も重要な分布なのは正規分布である。正規分布の確率密度関数は次式で与えられる。

公式 6-1 正規分布の定義

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

ただし、 μ は平均、 σ は標準偏差である。

このような正規分布を $N(\mu, \sigma^2)$ で表す。

確率変数 X の確率分布が正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ であるとき、 X は正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うといい、 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ とあらわす。

また、このとき、 $E(X) = \mu$ 、 $V(X) = \sigma^2$ であることがわかっている。(というか、そうなるように定義されているのでしょ。証明は難解なので割愛します。) このことから、正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ は、平均 μ 、分散 σ^2 の正規分布とよばれる。

特に、正規分布 $N(0,1)$ は、標準正規分布とよばれる。

正規分布のグラフ

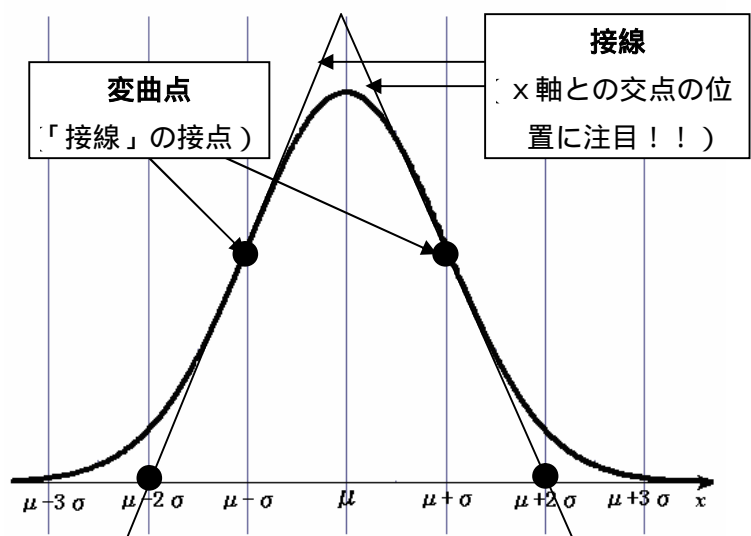
正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ のグラフは、右図の太線のようにになる。特筆すべき特徴は、

グラフが μ を中心とするベル型である

x 座標が $(\mu \pm \sigma)$ である点の変曲点である。

区間 $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$ にほとんどの確率が存在する。(約 99.7%)

グラフの特徴を的確につかんで、グラフの概形は必ず書けるようにしておくこと。式より重要。



注意 $N(\mu, \sigma^2)$ という表し方において、 σ^2 に 2 乗がついているので注意しよう。たとえば、正規分布 $N(0,4)$ のグラフの変曲点は、 x 座標が ± 2 の位置にあるのである。

正規分布が統計学でもっとも頻繁に用いられるのには次の2つの理由がある：

- (1) 近似的に正規分布に従うと考えられる確率変数が多くあること。
- (2) 確率分布が正規分布のときには、統計分析の理論的な結果が簡潔な形で得られること。

6.2 正規分布の性質

正規分布に従う確率変数を一次変換したのも正規分布に従うことがわかっている。よって、次が成り立つ。

公式 6-2 正規分布の性質

確率変数 X について、 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ であるとき、

$$aX + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2) \quad \text{が成り立つ。} \dots \dots \dots (\text{一次変換})$$

$$\text{特に、} Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \text{ とおいたとき、} Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1) \text{ である。} \dots \dots \dots (\text{標準化})$$

証明は授業で扱っていないので割愛します。

このとき、 Z は確率変数 X を標準化した変数と呼ばれ、標準正規分布にしたがう。標準正規分布の上側（下側）パーセント点は数表（教科書巻末、あるいは本シケプリ付録1を参照のこと）に与えられることから、この標準化を利用することにより、あらゆる正規分布を扱える。以下にこのことを用いた例題を取り上げる。

例2 正規分布の標準化に関する問題

【問題】 $X \sim N(1, 2^2)$ であるとする。このとき、次の確率を求めよ。

$$P(X \geq 2)$$

$$\text{【解答】 } P(X \geq 2) = P\left(\frac{X - 1}{2} \geq \frac{2 - 1}{2}\right)$$

$$= P(Z \geq 0.5) \quad \left(Z = \frac{X - 1}{2} \text{ とおいた。} \right)$$

0.309 （標準正規分布の上側確率の表から。教科書巻末または本シケプリ付録1参照のこと。）

また、一般には複数の独立な確率変数の和の確率分布は、各確率変数の確率分布とは異なる形状をしている。例えばさいころ1個の目の出方の確率分布と2個の出た目の和の確率分布とは全く異なっている。しかし、独立に正規分布に従う確率変数の和は正規分布であることが分かっている。このとき、次が成り立つ：

公式 6-3 正規分布の性質

n 個の確率変数 X_1, X_2, \dots, X_n は互いに独立であり、 $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ であるとする、

$$(X_1 + \dots + X_n) \sim N(\mu_1 + \dots + \mu_n, \sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2) \quad \text{が成り立つ。}$$

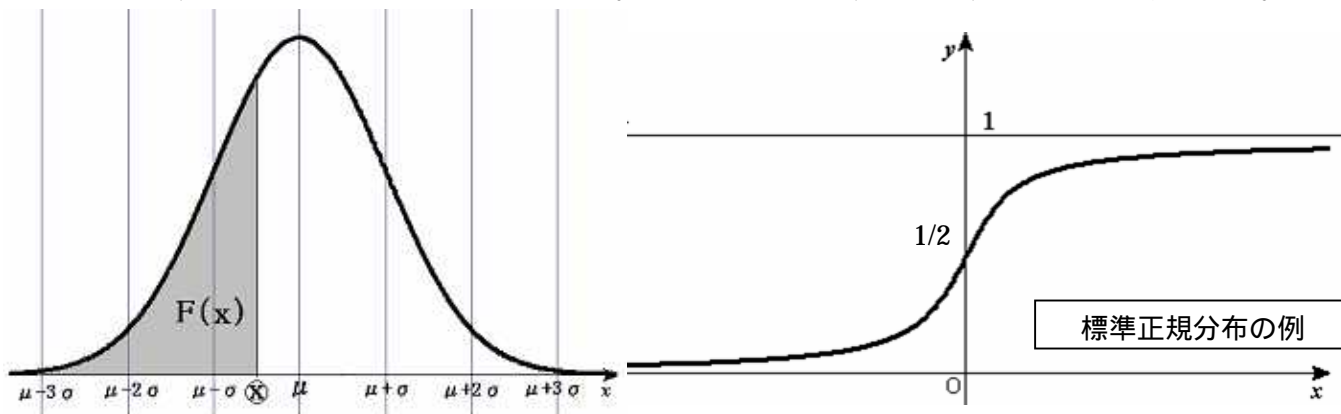
証明は授業でやっておらず、難解なので割愛します。

正規分布の累積分布関数（参考）

正規分布の累積分布関数は、次式

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt$$

で定義され、左下図の灰色の面積に相当する。グラフにすると、概形は、右下図のようになる。



厳密に覚える必要はないが、イメージを軽く頭にとどめておいた方が良いでしょう。

第7章 多次元の確率分布

7.1 同時確率分布

同時に2つの離散型確率変数 X, Y を考える。 X のとりうる値を x_1, x_2, \dots, x_k とし、 Y のとりうる値を y_1, y_2, \dots, y_l とする。このとき、 $p_{X,Y}(x_i, y_j) = P(X = x_i, Y = y_j)$ は X と Y を同時に与えたときの確率分布を定める。この2変数の関数 $p_{X,Y}(\cdot, \cdot)$ を X と Y の同時確率関数あるいは同時確率分布という。また、 X と Y の同時確率分布がわかっているならば、 X または Y 単独の確率分布を求めることは簡単である（知らない方を無視すればよい）。これを X または Y の周辺確率分布という。

同時確率分布は、下のように表にまとめると便利である。

| | | | | |
|------------|----|-----|-----|---------------|
| 同時確率分布 | | Y | | X の 周辺確率分布 |
| | | 40 | 50 | |
| X | 20 | 0.3 | 0.1 | 0.4 |
| | 30 | 0.1 | 0.5 | 0.6 |
| Y の 周辺確率分布 | | 0.4 | 0.6 | (1) |

確率変数の和の期待値

X と Y が確率変数であるとき、 $X + Y$ も確率変数である。また、2つの確率変数 X, Y に対して次が成り立つ。確率が3つ以上の場合も同様である。

公式 7-1 確率変数の和の期待値

2つの確率変数 X, Y について、

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

証明

$$\begin{aligned}
 E(X + Y) &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l (x_i + y_j) P(X = x_i, Y = y_j) \\
 &= \sum_{i=1}^k \left\{ \sum_{j=1}^l x_i P(X = x_i, Y = y_j) + \sum_{j=1}^l y_j P(X = x_i, Y = y_j) \right\} \\
 &= \sum_{i=1}^k \left\{ \sum_{j=1}^l x_i P(X = x_i, Y = y_j) \right\} \\
 &\quad + \sum_{i=1}^k \left\{ \sum_{j=1}^l y_j P(X = x_i, Y = y_j) \right\} \\
 &= \sum_{i=1}^k x_i \sum_{j=1}^l P(X = x_i, Y = y_j) + \sum_{j=1}^l y_j \sum_{i=1}^k P(X = x_i, Y = y_j)
 \end{aligned}$$

ポイント

期待値の定義。

$$= \sum_{i=1}^k x_i P(X = x_i) + \sum_{j=1}^l y_j P(Y = y_j)$$

$$= E(X) + E(Y)$$

(証終)

この式の前式からの変形作業は、すなわち各項それぞれ X, Y の周辺確率分布を求める作業と同じである。よく確認して欲しい。
期待値の定義。

7.2 共分散と相関係数

以下、 $E(X) = \mu_x$, $E(Y) = \mu_y$ とすると、2つの確率変数 X, Y の共分散は次のように定義される：

公式 7-2 共分散の定義

2つの確率変数 X, Y の共分散は、

$$Cov(X, Y) = E[(X - \mu_x)(Y - \mu_y)]$$

$$= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l (x_i - \mu_x)(y_j - \mu_y) P(X = x_i, Y = y_j)$$

x_i, y_j は X, Y のとりうる値。

$Cov(X, Y)$ は、 X, Y の直線的な関係を測る特性値である。

- $Cov(X, Y) > 0$ ならば、 X, Y は同じ大小の方向に動く確率が高い。つまり、 X が大きい値をとるときに Y も大きい値をとり、逆に、 X が小さい値をとるときには、 Y も小さい値をとる。
- $Cov(X, Y) < 0$ ならば、上とは反対方向に動く確率が高い。

共分散を実際に計算するときには次の公式が成り立つ。

公式 7-3 共分散の式の簡略形

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

証明

$$Cov(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$$

$$= E[XY - YE(X) - XE(Y) + E(X)E(Y)]$$

$$= E(XY) - E(X)E(Y) - E(Y)E(X) + E(X)E(Y)$$

$$= E(XY) - E(X)E(Y)$$

(証終)

ポイント

共分散の定義。

$E(X), E(Y)$ は定数とみなせるので、公式 5-3 (イ)・(ウ) を利用する。

また、 $X + Y$ の分散については、次が成り立つ。

公式 7-4 $X+Y$ の分散の展開

$$V(X + Y) = V(X) + 2Cov(X, Y) + V(Y)$$

証明

$$\begin{aligned} V(X + Y) &= E\left[\{(X + Y) - E(X + Y)\}^2\right] \\ &= E\left[\{(X - E(X)) + (Y - E(Y))\}^2\right] \\ &= E\left[\{X - E(X)\}^2\right] + 2E\left[\{X - E(X)\}\{Y - E(Y)\}\right] \\ &\quad + E\left[\{Y - E(Y)\}^2\right] \\ &= V(X) + 2Cov(X, Y) + V(Y) \end{aligned}$$

ポイント

分散の定義。

大カッコ内を展開後、
公式 5-3 (エ) を利用
して変形。

第 1・3 項は分散の定
義。第 2 項は共分散の
定義。

(証終)

相関係数

共分散は X と Y の直線的結びつきを測るが、単位に依存するため、直線関係が強いかどうかを判断するときには不便である。そこで、強弱を判断するために相関係数を以下のように定義する：

公式 7-5 2 確率変数の相関係数(定義)

$$\rho_{X,Y} = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

これは、第 3 章で定義された相関係数と同じ性質を持つ。(第 3 章 2 節参照。)

7.3 確率変数の独立性

2 つの離散型確率変数 X, Y のとる値がそれぞれ $x_1, x_2, \dots, x_k, y_1, y_2, \dots, y_l$ であるとする。このとき、すべての $i = 1, 2, \dots, k$ と $j = 1, 2, \dots, l$ に対して、 $P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j)$ が成り立つ(すなわち、片方の確率変数がどの値をとろうと、もう一方の確率分布に影響しない!!) とき、 X と Y は互いに独立であるという。 X と Y が独立ならば、次が成り立つ。

公式 7-6 独立な 2 確率変数の性質

(ア) $E(XY) = E(X)E(Y)$

(イ) $Cov(X, Y) = 0$

(ウ) $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$

次のページにその証明を記す。

証明

$$\begin{aligned} \text{(ア)} \quad E(XY) &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l x_i y_j P(X = x_i, Y = y_j) \\ &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l x_i y_j P(X = x_i) P(Y = y_j) \\ &= \sum_{i=1}^k x_i P(X = x_i) \sum_{j=1}^l y_j P(Y = y_j) \\ &= E(X)E(Y) \end{aligned}$$

ポイント

期待値の定義である。
ただし、確率変数が2
つあるので、式が複雑
化している。よく観察
してほしい。

X と Y の独立性を利用。

期待値の定義。

(証終)

(イ) 公式 7-3 に上の (ア) の式を代入することで得られる。

(証終)

(ウ) 公式 7-4 に上の (イ) の式を代入することで得られる。

(証終)

第 8 章 大数の法則と中心極限定理

大数の法則については、理解の助けとなるよう、法則の導出過程について説明するが、納得してもらえば、最終的には結果だけ覚えておけばよいだろう。

8.1 大数の法則

同一の確率分布に従う互いに独立な確率変数 X_1, X_2, \dots, X_n を考える。これらが従う確率分布の期待値を μ 、分散を σ^2 であるとする。(すべて同一)

これらすべての確率変数の「(標本)平均」(\bar{X} : これもまた確率変数であることに注意。標本平均については第 9 章 2 節参照) の期待値は、

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = \mu \dots \dots$$

公式 5-3(ウ)

公式 7-1 を拡張したもの。
(和の期待値 = 期待値の和)

である。(標本平均については、第 9 章参照。)

一方、これらすべての確率変数の和の分散は、すべての確率変数が互いに独立であることから、公式 7-6(ウ)より、

$$V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = V(X_1) + \dots + V(X_n) = n \cdot \sigma^2 \dots \dots$$

が成り立つ。これを用いると、すべての確率変数の平均 (\bar{X}) の分散は、

$$V(\bar{X}) = V\left(\frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n X_i\right)\right) = \frac{1}{n^2} V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{\sigma^2}{n} \dots \dots$$

公式 5-8(イ)

より。

となる。よ、より、 $E(\bar{X}) = \mu, V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$ であることがわかった。つまり、平均・分散の同じ

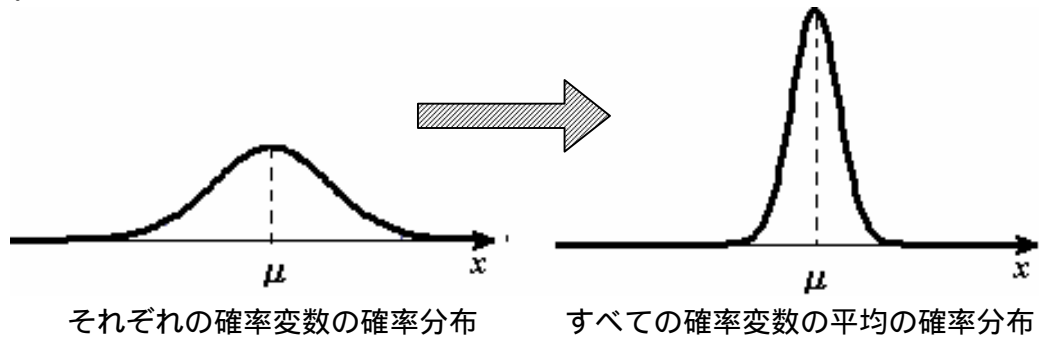
確率分布に従う複数の確率変数について、その確率変数の数が多ければ多いほど、分散は小さくなっていき、期待値が μ のままであるから、 μ 付近の値をとる確率が上昇していく。(次のページの図も参考にして欲しい。)これを厳密な形でまとめると次のようになる。

《大数の法則》

期待値が μ である同一の確率分布に従う n 個の確率変数 X_1, X_2, \dots, X_n を考える。これらの平均を \bar{X} とすると、任意の $\varepsilon > 0$ について、次が成り立つ。

$$P\left(|\bar{X} - \mu| < \varepsilon\right) \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty)$$

(模式図)



補足 特に、上の結果から、 $X_1, X_2, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ のとき、 $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ であることが

わかる。このことは後の内容の理解に役立つ。

大数の法則の示す意味

大数の法則により、同一の試行を数多く繰り返すことによって、出た値すべての期待値が、それぞれの試行が従う大元の確率分布の期待値に近づいていくということが示された。

つまり、このことは、試行によって得られる値の信頼度は、試行の回数を増やせば増やすほど高くなることを意味する。最低限ここだけ覚えていけばよい。

この原理を用いている主な例として、プロ野球で打率計算をする際、規定打席数が設けられていることが挙げられる。ある一定以上打席数がなければ、打率の信頼度は高くないから記録として認めない、というわけである。

8.2 中心極限定理

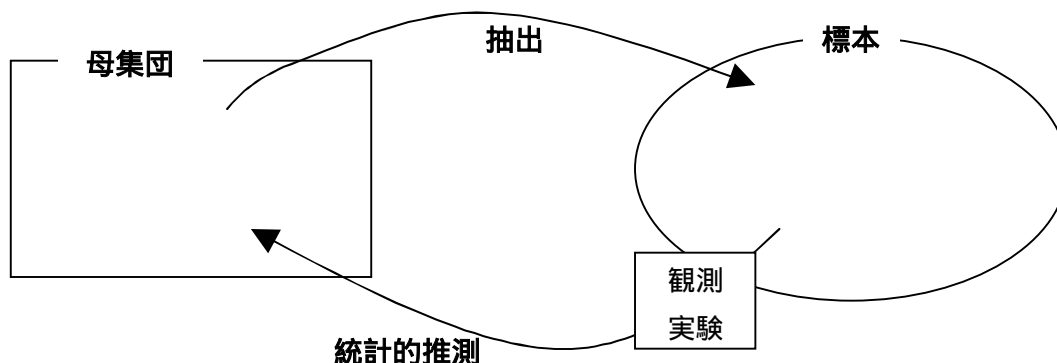
(授業で今年は扱っておりませんので、省略です。)

第9章 標本分布

難しくなるのはここからです。こちらも気合を入れて解説しますので、気合をいれて頑張りましょう！！

9.1 標本抽出による調査とは

実際にある集団について知りたいとき、全体からではなく部分から推量することがある。これが**標本抽出による調査**である。これは、集団全体(=母集団)からランダムに標本を選び(抽出)それらの標本に対しての観測や実験によって得られたデータから集団全体を推測する方法である。



ここで留意すべきなのは、直接調査できるのは標本であるが、知りたいのは母集団の分布についてであるということである。

9.2 標本分布

同一の母集団から得た標本 X_1, X_2, \dots, X_n を考える。これらは同一の確率分布に従って得られた値である。これらを用いた関数で与えられるある**統計量**(標本だけから計算される量) $t(X_1, X_2, \dots, X_n)$ を考える。ここで、標本 X_1, X_2, \dots, X_n は母集団の確率分布に従って得られる値だから、確率変数とみなしてよい。よって、 $t(X_1, X_2, \dots, X_n)$ も確率変数である。このときの $t(X_1, X_2, \dots, X_n)$ の確率分布を**標本分布**というのである。この後説明する標本平均・標本分散は統計量でありその確率分布は標本分布である。(頭はこんがらがっていませんか!?)

母集団分布・母平均・母分散

標本が従う母集団の確率分布のことを**母集団分布**という。

また、母集団分布の平均と分散をそれぞれ**母平均**・**母分散**と呼び、一般に $\mu \cdot \sigma^2$ と表す。

標本平均

標本 X_1, X_2, \dots, X_n から計算された平均を**標本平均**と呼び、**標本平均** \bar{X} は次式で与えられる:

公式 9-1 標本平均の定義と性質

標本平均は、 $\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ で与えられる。この値の期待値は

母平均 μ と一致なるようになっている。すなわち、 $E(\bar{X}) = \mu$ である。

公式 9-1 の後者の式が成り立つことの証明は第 8 章の式 8-1 の計算課程と完全に一致する。各自確認して欲しい。

注意 $\bar{X} = \mu$ ではないことにくれぐれも注意すること。再三述べるが、 \bar{X} は定数ではなく確率変数であり、期待値ではなく標本平均なのである。

標本分散

公式 9-2 標本分散の定義と性質

標本分散は、 $s^2 = \frac{1}{n-1} \left\{ (X_1 - \bar{X})^2 + \dots + (X_n - \bar{X})^2 \right\} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ で与え

られる。この値の期待値は母分散 σ^2 と一致するようになっている。つまり、 $E(s^2) = \sigma^2$

「**標本分散の式の分母が $n - 1$ である**」のは何故だろうか？以下、標本分散の期待値が母分散の一致することの証明を述べる。(参考)

証明

任意の自然数 i ($1 \leq i \leq n$) について、新たな確率変数 Y_i を標本 X_i を用いて $Y_i = X_i - \mu$ と定義する。

このとき、 Y_1, \dots, Y_n の (標本) 平均 \bar{Y} を用いると、次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} Y_i - \bar{Y} &= (X_i - \mu) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i = (X_i - \mu) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu) \\ &= (X_i - \mu) - (\bar{X} - \mu) \\ &= X_i - \bar{X} \end{aligned}$$

よって、式 $\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \dots \dots \dots$ も成り立つ。

一方、 $E(Y_i^2) = E\{(X_i - \mu)^2\} = V(X_i) = \sigma^2 \dots \dots \dots$ 、

ポイント

μ : 母平均

ここで、 \bar{Y} は定数ではなく、確率変数であることに注意!!!

$Y_i \cdot \bar{Y}$ の定義を用いて展開。さらに \bar{X} の定義を用いて変形。

分散の定義。

さらに、 $E(\bar{Y}) = E(\bar{X} - \mu) = \mu - \mu = 0$ より、

$$E(\bar{Y}^2) = E\{(\bar{Y} - E(\bar{Y}))^2\} = V(\bar{Y}) \\ = V(\bar{X} - \mu) = V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

が導ける。・・・・・・・・

よって、 $\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2$ の期待値を考えると、

$$E\left[\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2\right] = E\left[\sum_{i=1}^n (Y_i^2) - n\bar{Y}^2\right] \\ = E\left\{\sum_{i=1}^n (Y_i^2)\right\} - nE(\bar{Y}^2) \\ = \sum_{i=1}^n E(Y_i^2) - nE(\bar{Y}^2)$$

となり、ここに \cdot 式を代入することで、

$$= n\sigma^2 - \sigma^2 \\ = (n-1)\sigma^2$$

となる。上式および \cdot より、すなわち、

$$E\left[\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2\right] = (n-1)\sigma^2 \cdots \cdots \quad \text{が成立する。}$$

さて、そもそも標本分散の定義は

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \text{ であった。この期待値を考えれば、}$$

$$E(s^2) = E\left(\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2\right) = \frac{1}{n-1} E\left(\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2\right)$$

を代入して、

$$E(s^2) = \frac{1}{n-1} \times (n-1)\sigma^2 = \sigma^2$$

よって、命題は示された。

(証終)

定義 $Y_i = X_i - \mu$ 両辺
の標本平均を取って得
た関係式を適用。さら
に、 $E(\bar{X}) = \mu$ および公
式 5-3(イ)を用いて変
形。

上式を活用後、分散の
定義に持ち込む。

最後の変形は、第 8 章
式に等しい。確認し
て欲しい。

公式 2-4 を使って導け
る。

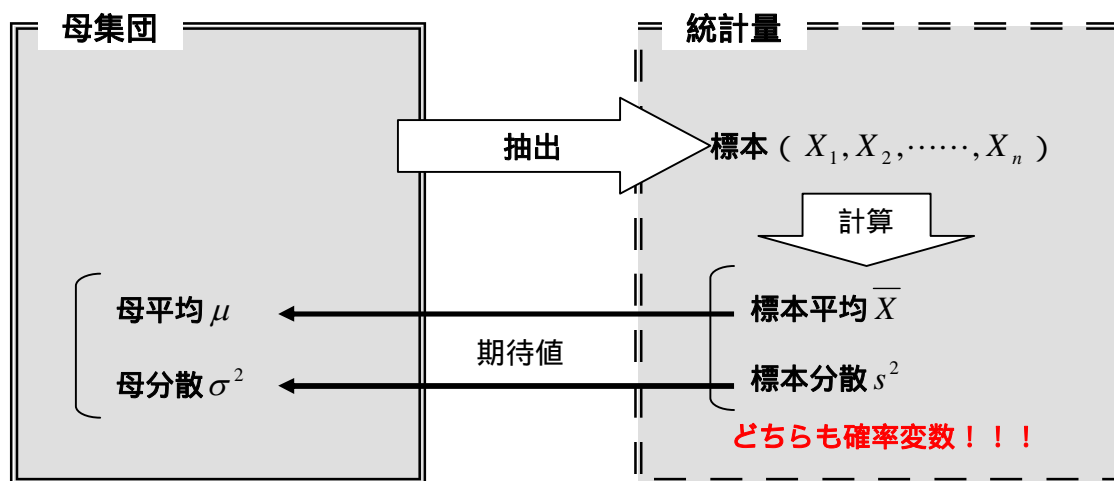
第 1 項は公式 7-1 を用
いた。

公式 5-3(ウ)を用いた。

分かっていただけただけでしょうか？

展開が煩雑なのは自分の力不足が原因です。ごめんなさい。

母集団・標本・母平均・母分散・標本平均・標本分散の関係は、各自しっかりと理解しましょう！！（下図はその対応関係を示したものです。）



第 10 章 正規分布からの標本

ここでは、統計学的に特に重要な 2 つの分布について取り上げる。以降の内容の基礎となるので、概念だけでもつかんでもらいたい。

10.1 χ^2 (カイ 2 乗) 分布

公式 10-1 χ^2 分布の定義

Z_1, Z_2, \dots, Z_k は独立で、それぞれが標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数である。いま、

$$Y = Z_1^2 + Z_2^2 + \dots + Z_k^2$$

とすると、確率変数 Y の確率分布を自由度 k の χ^2 分布といい、 $\chi^2(k)$ で表す。

章末にグラフを載せるので、確認して欲しい。

10.2 t 分布

公式 10-2 t 分布の定義

Z が標準正規分布 $N(0,1)$ に従い、 Y が自由度 k の χ^2 分布 $\chi^2(k)$ に従うとする。さらに Z と

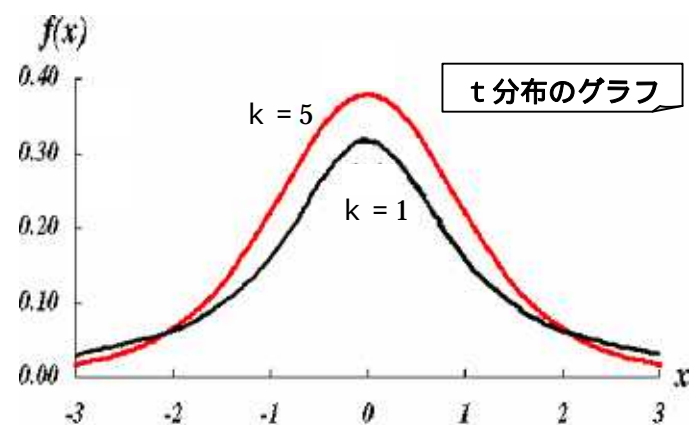
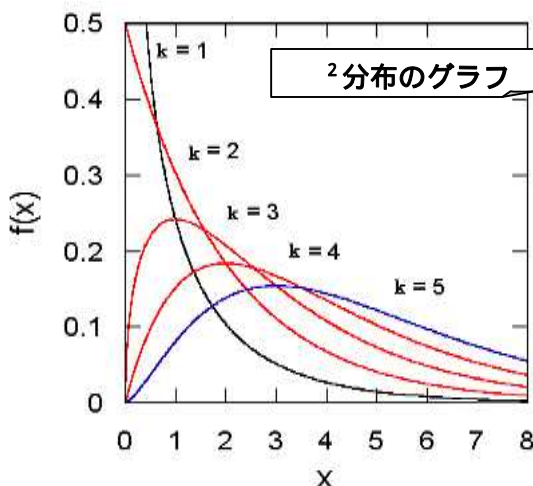
Y は互いに独立であるとする。確率変数 t は、
$$t = \frac{Z}{\sqrt{Y/k}}$$

と定義される。このとき t の確率分布を自由度 k の t 分布といい、 $t(k)$ で表す。

章末にグラフを載せるので、確認して欲しい。

《t 分布のグラフの特徴》

- (1) t 分布の確率密度関数は 0 を中心に左右対称である。
- (2) 自由度 k の t 分布の確率密度関数は $N(0,1)$ の確率密度関数よりもすそが厚い。
- (3) 自由度 k が小さいほど t 分布のすそ野が長い。また、 $k \rightarrow \infty$ のとき、t 分布の確率密度関数は、 $N(0,1)$ の確率密度関数に近づく。



第 11 章 推定

ここでは、12 章の内容の基礎となる考え方をいくつか取り上げる。重要なのできちんと覚えて欲しい。

(なお、11 章の内容は教科書の 11 章の内容とは必ずしも一致しません。一部 10 章も含みます。)

11.1 分散が既知のときの標本平均の標本分布

母分散 σ^2 が既知のとき、母平均 μ を推定することができる。まず、以下のことを覚えておこう。

公式 11-1 重要な統計量

確率変数 X_1, X_2, \dots, X_n はそれぞれ独立かつ $N(\mu, \sigma^2)$ に従うとし、これらの標本平均を

\bar{X} とすると、統計量
$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

は、標準正規分布 $N(0,1)$ に従う。

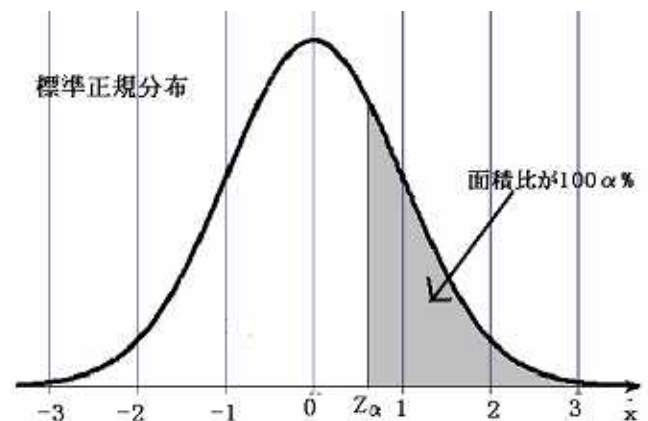
この Z の値、重要ですのできちんと覚えてください！！さて、この Z の値は、第 8 章で

$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ が示されていますから、 \bar{X} を標

準化した値ということが分かりますね。

ここで、標準正規分布で、ある値より上側となる確率が 100 % であるとき、その値の点を上側

パーセント点といい、 Z_α と表す。



これらを用いて、母平均の区間推定を行うことができる。先ほどまでの説明および標準正規分布

の対称性から、
$$P\left(-Z_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \leq Z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

が成り立つことがわかる。カッコ内を変形すると、

$$P\left(\bar{X} - Z_{\alpha/2} \times \sigma / \sqrt{n} \leq \mu \leq \bar{X} + Z_{\alpha/2} \times \sigma / \sqrt{n}\right) = 1 - \alpha$$

となる。つまり、以下が成り立つ。

公式 11-2 信頼区間 (母分散が既知のとき)

区間 $\left[\bar{X} - Z_{\alpha/2} \times \sigma / \sqrt{n} , \bar{X} + Z_{\alpha/2} \times \sigma / \sqrt{n} \right]$ が母平均 μ を含む確率は、 $1 - \alpha$ である。
上の区間は、 μ の信頼係数 $1 - \alpha$ の信頼区間と呼ばれる。

これを用いた例を一つ紹介しよう。

例3 母平均の区間推定に関する問題 A

【問題】座金の製造工場において、ある日に作られた座金の中から、100 個を抽出してその厚さを測定したところ、平均 $\bar{X} = 2.346$ (mm) であった。また、ここで作られている座金の厚さの分散はすでに $\sigma^2 = 0.047$ (mm) であることがわかっている。母平均 μ の信頼係数 90% の信頼区間を求めよ。(教科書 P.226 改)

【解答】数表(教科書巻末か本シケプリ付録 1 参照)より、 $\alpha = 0.1$ のとき、およそ $Z_{\alpha/2} = 1.645$

であるから、これらの値を公式 11-2 に代入すると、

$$\left[2.346 - 1.645 \times 0.047 / \sqrt{100} , 2.346 + 1.645 \times 0.047 / \sqrt{100} \right]$$

これを計算すれば、信頼区間は、およそ [2.338, 2.354] となる。

11.2 標本分散の標本分布

ここでは事実のみ述べておきます。ざっと読み流してもらって構わないと重います。

第 9 章 2 節で、標本分散 s^2 の定義は述べた。ここで、

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = \left(\frac{X_1 - \bar{X}}{\sigma} \right)^2 + \left(\frac{X_2 - \bar{X}}{\sigma} \right)^2 + \dots + \left(\frac{X_n - \bar{X}}{\sigma} \right)^2 \text{ は自由度 } n-1 \text{ の } \chi^2 \text{ 分布}$$

$\chi^2(n-1)$ に従うことが証明される。

自由度がなぜ $n-1$ かについてはここでは証明しないが、式中の \bar{X} は X_1, X_2, \dots, X_n をもとに算

出される値であるから、 X_1, X_2, \dots, X_n と \bar{X} についての関係式を解くと、独立な変数を一つ消

去できる。よって、自由度が $n-1$ であると感覚的に理解して欲しい。この結果は次節で用いる。

11.3 分散が未知のときの標本平均の標本分布

母分散が既知の場合については、1 節で述べた。しかし、一般には、母分散が未知の場合の方が多だろう。この場合、次の t 統計量を用いて推定などを行う。

公式 11-3 重要な統計量 (t 統計量)

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{s / \sqrt{n}} \quad (\sim t(n-1))$$

この式を変形してみると・・・

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} = \frac{\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}}}{\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} / (n-1)}} = \frac{Z}{\sqrt{Y/(n-1)}}$$

$Z \sim N(0,1)$ (公式 11-1 より) であり、 $Y \sim \chi(n-1)$ (2 節より) である。

\bar{X}, s^2 は互いに独立であることから、(公式 10-2 より) t は自由度 $n-1$ の t 分布 $t(n-1)$ に従うことがわかる。また、自由度 k の上側確率 100% の点を $t_\alpha(k)$ と書く。

注意 自由度 n ではなく、 $n-1$ の t 分布に従うこと、 s に 2 乗がついていないことに注意しよう!!!

これを用いて、1 節と同様の推定が、母分散が未知の場合でも可能になる。先ほどまでの説明および t 分布の対称性から、

$$P\left(-t_{\alpha/2}(n-1) \leq t \leq t_{\alpha/2}(n-1)\right) = 1 - \alpha$$

が成り立つことがわかる。 t に公式 11-3 を代入し、カッコ内を変形すると、

$$P\left(\bar{X} - t_{\alpha/2}(n-1) \times s/\sqrt{n} \leq \mu \leq \bar{X} + t_{\alpha/2}(n-1) \times s/\sqrt{n}\right) = 1 - \alpha$$

となる。つまり、以下が成り立つ。

公式 11-4 信頼区間 (母分散が未知のとき)

区間 $\left[\bar{X} - t_{\alpha/2}(n-1) \times s/\sqrt{n}, \bar{X} + t_{\alpha/2}(n-1) \times s/\sqrt{n}\right]$ が母平均 μ を含む確率は、 $1 - \alpha$ である。

これを用いた例を一つ紹介しよう以下の問題は、例 3 の類題である。

例 4 母平均の区間推定に関する問題 B

【問題】 座金の製造工場において、ある日に作られた座金の中から、100 個を抽出してその厚さを測定したところ、(標本)平均 $\bar{X} = 2.346$ (mm)、(標本)分散 $s^2 = (0.047)^2$ (mm) であった。母平均 μ の信頼係数 90% の信頼区間を求めよ。(教科書 P.226 改)

【解答】 数表(教科書巻末か本シケプリ付録 2 参照)より、 $\alpha = 0.1$ のとき、およそ $t_{\alpha/2}(99)$

1.660 であるから、これらの値を公式 11-4 に代入すると、

$$\left[2.346 - 1.660 \times 0.047 / \sqrt{100}, 2.346 + 1.660 \times 0.047 / \sqrt{100}\right]$$

第 12 章 仮説検定

この分野は今まで学んできたことの集大成です。テストにも必ず出ますし、実生活でも役立つかもしれません。一回通して読んだら、必ず問題演習をこなしましょう。理解が深まります。ここでは所々に例題を用いつつ説明しますので、しっかりついてきてください!!!

12.1 平均値の検定 (母分散が既知の場合)

仮説検定の目的は、母集団の確率分布についての仮説あるいは命題を、標本に基づいて検証することにある。(ここでこの意味がわからなくてもまあいいです) 一つ例を見てみましょう。

例5 仮説検定 (平均値の検定・母分散既知の場合)

【問題】 あるビール製造工場では、容器が 350ml の缶ビールが最も多く製造されている。ところが最近、どうも容量が設定値の 350ml とは異なることが多いとの報告が何回かあった。そこで、本当に要領が平均的に 350ml かどうかを検討するために、10本の缶ビールをランダムに取って容量を測ったところ、次のようなデータが得られた。(単位: ml)

349.1 348.2 348.1 350.5 350.3 350.1 349.2 348.6 349.5 348.2

このデータから標本平均を計算すると、 $\bar{X} = 349.18$ となる。また、過去の経験から、缶ビールの容量の(母)分散は $\sigma^2 = (0.9)^2$ であることが分かっている。この結果から、「やはり平均的に 350ml ではない」と結論付けてよいだろうか?

確かにそう結論付けても良いように見える。しかし、データのばらつきを考えれば、たまたま平均が 350 を下回っただけではないか、と反論することも可能だろう。

このような議論に客観的判断を下す手段が仮説検定である。では、その手順について見ていこう。

Step1 帰無仮説と対立仮説をたてる

まず、この缶ビールの各容量 X_i (ml) は独立に正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従う確率変数であることがわかっているものとする。仮説検定では、まずこの問題に関するある命題(仮定)を設定する。ここでの命題は、今後の処理上、等式とするのがよい。今回は、容量の平均値が 350ml か否かを論じているので、この命題を、 $\mu = 350$ とおくのがもっとも適切であろう。このような命題を帰無仮説といい、 H_0 で表す。つまりここでの場合、

$$H_0 : \mu = 350$$

と表記する。さらに、帰無仮説が正しくないときに成り立つ命題(仮説)をおく。このような命題を対立仮説と呼び、 H_1 で表す。これは必ずしも一概には決まらないが(後述) ここでの場合、

$$H_1 : \mu \neq 350$$

とするのが適当である。このように、 を用いて表記される対立仮説を**両側対立仮説**という。

Step2 検定に用いる統計量を定め、帰無仮説 H_0 のもとでその確率分布を求める

いま、上の 10 個の缶ビールをランダムに取り出し、それらの容量を X_1, X_2, \dots, X_{10} で表す。

もし帰無仮説が正しいならば、次の式が成り立つ：

$$Z = \frac{\bar{X} - 350}{0.9 / \sqrt{10}} \sim N(0,1)$$

あらかじめ母分散がわかっている場合はこの統計量 Z を用いるのが適切である。(公式 11-1)
これは、 X_1, X_2, \dots, X_{10} の値が同一の正規分布に従うならば、この統計量が標準正規分布に従うことがわかっているからである。

Step3 有意水準を決め、棄却域を決める 用語については後述(2節)

ここで、標準正規分布 $N(0,1)$ の上側 2.5%点は 1.96 (教科書巻末の表あるいは本シケプリ付録 1 参照) であることがわかるから、次式が成り立つ。

$$P\left(\frac{\bar{X} - 350}{0.9 / \sqrt{10}} > 1.96\right) = 0.025 \quad \text{標準正規分布の対称性から、この式は次式と同値である。}$$

$$P\left(\left|\frac{\bar{X} - 350}{0.9 / \sqrt{10}}\right| > 1.96\right) = 0.05$$

すなわち、 H_0 が真のときに、 Z の絶対値が 1.96 を超える値になることは起こりにくいと考えられる (起こる確率は 0.05 以下)。

Step4 検定に用いる統計量の値を求め、値が棄却域に入るかどうかを調べる

用語については後述(2節)

データから計算される Z の値 z について、もし $|z| > 1.96$ となったときには、 H_0 が真でありかつ珍しいことが起こったとするよりは、帰無仮説 H_0 自身が正しくないと考えほうが自然である。このような理論で帰無仮説を退けることを**帰無仮説を棄却する**(漢字注意)という。上の例では、 $z = -2.88$ であるため、帰無仮説 H_0 は棄却される。つまりここでの答えは、「缶ビールの容量の平均値は 350ml ではない可能性が高い」となる。

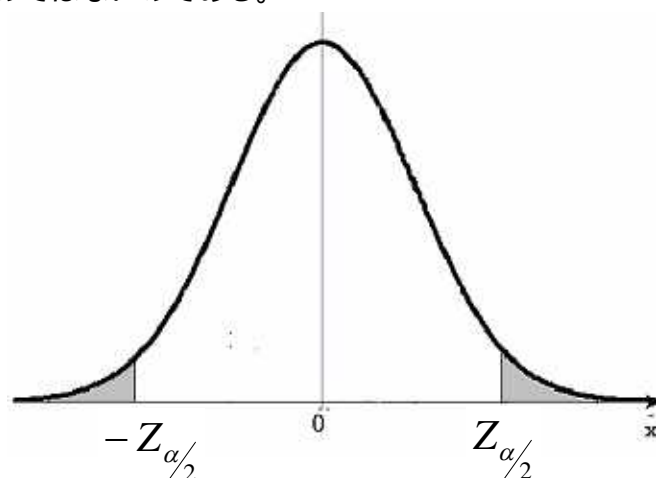
12.2 棄却域・有意水準

上の例の $|z| > 1.96$ のように、帰無仮説を棄却すべき統計量の値の集合を**棄却域**と呼ぶ。上の例では、 $|z| > 1.96$ のときには「帰無仮説は棄却される」といい、逆に $|z| \leq 1.96$ であれば「帰無仮説は棄却されない」という。

さて、上の例では、0.05 を十分小さい確率であると考えたが、(上の例で、始めに 0.25 を考えたのは、統計量 Z の値が極端に大きい場合、小さい場合それぞれ 2.5% の部分、合計 5% を棄却域に設定するためであった。) どの程度の確率を小さいと判断するかは主観による。しかし、伝統的な基準としては 0.05 あるいは 0.01 という値が主に用いられる。このような基準となる確率は**有意水準**と呼ばれ、 α で表される。有意水準の値を明らかにしたい場合には、「有意水準 α の検定」という言い方をする。有意水準は試験の問題であらかじめ与えられることが多い。

注意ここで、帰無仮説が棄却されないことを、帰無仮説が正しいとは**言ってはならない**ことに注意。帰無仮説が棄却されないということは、標本が帰無仮説と矛盾しないことを意味するだけであり、帰無仮説を積極的に支持し得るものではないのである。

ちなみに上の例のような場合、棄却域を図で示すと、有意水準を α とした場合、右図の灰色の部分になる。 α は標準正規分布全体に対する灰色部分の面積の比に一致する。この灰色部分の面積を全体に対して「無視できるほど小さい」とみなしているわけですね。



2 種類の誤り

仮説検定には、常に 2 種類の誤りを犯す可能性がある。

(a) **第 1 種の誤り**・・・帰無仮説が正しいのに、それを棄却する誤り

例：抜き取り検査にあたって合格するはずの良製品に不合格の判定をくだしてしまう

(b) **第 2 種の誤り**・・・帰無仮説が誤っているのに、それを棄却しない誤り

例：抜き取り検査にあたって不合格のはずの不良製品に合格の判定を下してしまう

前者の誤りの起きる確率はほぼ有意水準に等しく非常に小さい。このため、帰無仮説を棄却できれば対立仮説が正しいとしてほぼ構わない。しかし、後者の誤りを犯してしまう場合、有意水準を小さな値でおさえしていない可能性がある。このため、あらためて言うが、たとえ帰無仮説が棄却されないとしても、帰無仮説を積極的に支持されるわけではないのだ。

なぜ、仮説検定は有効なのか？

さて、ここまで仮説検定の大まかな概要について述べてきた。しかし、「仮説検定に何の意味があるのか」「有意水準が主観的に決まるものに客観性があるのか」といった疑問をお持ちの方もいるかもしれない。ここでは、そもそも仮説検定では一体何をやっているのかについて説明する。

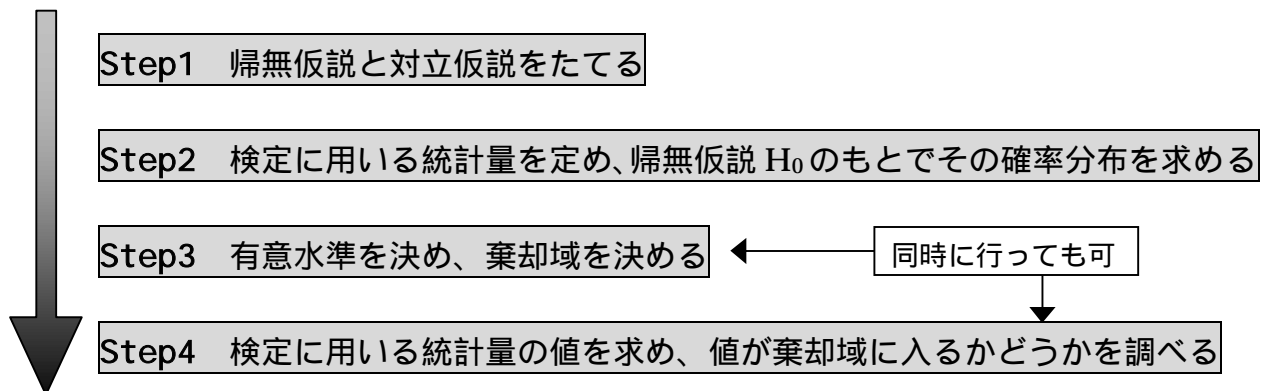
与えられた標本のみで物事を判断する場合、その判断の結果は標本の値に大きく依存してしま

う。そこで、標本のデータのばらつき具合などから、これらの値が従う母集団の確率分布（先ほどの例では正規分布）を推定する。母集団の確率分布の中で判断した方が、データのみで結論を下すよりも、とったデータに対する依存度が低下し、データ単独で判断するよりも結論の信頼性が少しでも増すということなのだ。

一般的に世の中のあらゆる種類の確率分布は、近似的に正規分布に従うことがわかっている。よって、仮説検定でもちいる統計量は正規分布または正規分布をベースに定義される統計量となる。これから他のタイプの仮説検定について説明するが、これらも基本的な概念はこれと同じである。

分かっていただけたでしょうか？

仮説検定の基本手順 ここでしっかり覚えておこう！！



12.3 平均値の検定（分散は未知）

一般に、データが従う母集団の母分散はわかっていないことが多い。そのような場合、例5のような仮説検定をどう行えばよいのか説明する。

ここでは一般的な話をしよう。

Step 1 ここでは $H_0 : \mu = \mu_0$ 、 $H_1 : \mu \neq \mu_0$ としよう。ここでの対立仮説も両側対立仮説である。

Step 2 あらかじめ得た標本の個数・標本平均・標本分散がそれぞれ n 、 \bar{X} 、 s^2 であるとしよう。ここでは母分散は分かっていないため、例5と同じ統計量をもちいるのは不適切である。そこで t 統計量（公式 11-3）を用いる。なぜなら、 X_1, X_2, \dots, X_n の値が同一の正規分布に従うならば、この統計量が自由度 $n-1$ の t 分布に従うことがわかっているからである。つまり、 $H_0 : \mu = \mu_0$ が真のとき、

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \sim t(n-1) \quad s \text{ に 2 乗がついていないことに注意！！}$$

が成り立つ。

Step 3 有意水準を α とする。 H_0 が真のとき、

$$P\left\{\left|\frac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}\right| > t_{\alpha/2}(n-1)\right\} = \alpha \quad \text{であるから、棄却域は、次式}$$

$$|t| = \left|\frac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}\right| > t_{\alpha/2}(n-1) \quad \text{で与えられる。}$$

Step 4 実際に t の数値をもとめ、値が棄却域にあれば「帰無仮説を棄却」し、なければ「棄却しない」とする。

平均値の検定 片側対立仮説を使う場合

今までの仮説検定では、対立仮説を両側対立仮説としてきた。こんどは、片側対立仮説を用いる場合についてみてみよう。

例6 仮説検定 (平均値の検定・母分散未知の場合)

【問題】 陸上競技の選手である B さんは、100m 走で、平均で 12 秒より速く走れると自慢している。B さんの友達は、このことを確認したかったので、B さんに時間を おいて 9 回走ってもらったところ、以下の記録を得た(単位: 秒)。

11.98 11.99 12.00 12.05 12.05 12.00 11.97 11.98 11.96

このデータの標本平均と標本分散は、それぞれ $\bar{X} = 11.997778$ 、 $s^2 = 0.00104438$ と計算できる。B さんは 100m を平均で 12 秒より速く走ることができるかと結論できるだろうか? 有意水準を 0.05 とし、仮説検定を行いなさい。

では、順を追って答え方を見てみよう。

Step 1 B さんの 100m のタイムは正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ にしたがうとする。このとき帰無仮説と対立仮説を次のように定める。

$$H_0 : \mu = 12 \quad H_1 : \mu < 12$$

帰無仮説は示したいものが何であっても、必ず等式の関係式を用いよう。また、対立仮説が を用いて表記されないのは、ここではタイムが 12 秒より速いのか否かを見ているのであって、12 秒よりはるかに遅いことは全く考えられないと初めからわかっているからである。このように、不等号をもちいて表された対立仮説を片側対立仮説という。

Step 2 母分散がわからないので、 t 統計量

$$t = \frac{\bar{X} - 12}{s/\sqrt{n}}$$

を用いる。今回の場合、 t は帰無仮説のもとで自由度 8 ($9 - 1 = 8$) の t 分布 $t(8)$

にしたがう。

Step 3

ここで、対立仮説に不等号を使ったことを思い出してもらいたい。ここでは、t 統計量の実際の値が極端に大きい場合は考えていない。つまり、棄却域は t が極端に小さいといえる領域のみに設定する。問題に与えられているように、有意水準 0.05 の仮説検定を考える。数表(教科書巻末あるいはシケプリ付録 2 参照)より、 $t_{0.05}(8) = 1.86$ であり、t 分布には対称性があるから、 $(-\infty, -1.86)$ が有意水準 0.05 で検定を行うときの棄却域になる。

Step 4

次のように、標本から t の値を求める。

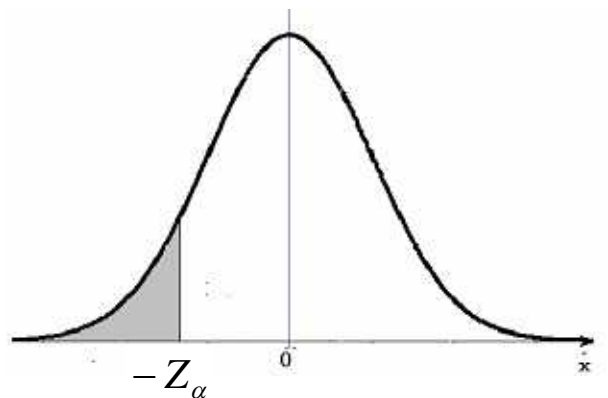
$$t = \frac{\bar{X} - 12}{s/\sqrt{n}} = \frac{\bar{X} - 12}{\sqrt{s^2/n}} = \frac{11.997778 - 12}{\sqrt{0.00104438/9}} = \frac{-0.002222}{0.01077231} = -0.206$$

- 1.86 < - 0.206 だから、標本から計算された t は棄却域に入らない。つまり帰無仮説 $H_0 : \mu = 12$ は有意水準 0.05 では棄却されない。したがって、B さんの 100m 走の平均

は 12 秒より短いとは結論できない。.....(答)

対立仮説の不等号が逆の場合も同様の流れで論述できる、各自問題演習で確かめること。

片側対立仮説を用いる場合、両側対立仮説とは違い、右図の灰色の部分^①が棄却域となる。灰色の部分の面積比は灰色の箇所が一つであってもである。よくチェックして欲しい。



灰色の部分が正の部分の場合もある

P 値

ちなみに、帰無仮説が「 $<$ 」を用いて与えられる場合、標本から計算された t の値を $t = t_0$ とすると、t 統計量

の値が t_0 より小さくなる確率を **P 値** と呼ぶ。よって、

P 値が有意水準 よりも小さければ、帰無仮説は有意水準 で棄却される。

12.4 母平均の差の検定

ここからは、平均値の検定以外の仮説検定を説明する。出てくる公式の証明に関しては、授業で扱っておらず、こちらもだいぶ疲れてきたので割愛させていただきます。

二つの正規母集団 $N(\mu_1, \sigma_1^2), N(\mu_2, \sigma_2^2)$ それぞれから大きさ m, n の標本 $X_1, X_2, \dots, X_m, Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ を抽出したときについて考えよう。

Y_1, Y_2, \dots, Y_n を抽出したときについて考えよう。

Step 1 帰無仮説を $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ とする。対立仮説については、目的に応じて以下のいずれかを設定する。

- | | | |
|------------------------------|---|--------|
| (a) $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ | } | 両側対立仮説 |
| (b) $H_1 : \mu_1 > \mu_2$ | } | 片側対立仮説 |
| (c) $H_1 : \mu_1 < \mu_2$ | | |

Step 2 統計量を定義するために、合併した標本分散を考える。定義は次の通り：

公式 12-1 合併した標本分散の定義

2つの母分散が等しい ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$) 場合、合併した標本分散 s^2 は次式で表す。

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X})^2 + \sum_{j=1}^n (Y_j - \bar{Y})^2}{m+n-2} = \frac{(m-1)s_1^2 + (n-1)s_2^2}{m+n-2}$$

ただし、 s_1^2, s_2^2 はそれぞれ $X_1, X_2, \dots, X_m, Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ の標本分散。

次に2標本t統計量を定義し、これを用いる。定義は次の通り：

公式 12-2 2標本t統計量の定義

$$t = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{s \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}} \quad (H_0 \text{が正しければ、} t \sim t(m+n-2))$$

ただし、 \bar{X}, \bar{Y} はそれぞれ $X_1, X_2, \dots, X_m, Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ の標本平均。s は合併した標本分散の平方根をとったもの。

上の枠内にあるように、もし、 H_0 が正しければ、t は自由度 $m+n-2$ の t 分布 $t(m+n-2)$ に従う。

Step 3&4 以上より、

対立仮説が(a)のとき： $|t| > t_{\alpha/2}(m+n-2)$ のときに帰無仮説を棄却し、そうでないときは棄却しない。

対立仮説が(b)のとき： $t > t_{\alpha}(m+n-2)$ のときに帰無仮説を棄却し、そうでないときは棄却しない。

対立仮説が(c)のとき： $t < -t_{\alpha}(m+n-2)$ のときに帰無仮説を棄却し、そうでないと

きは棄却しない。

・ここでは、2つの異なる(ただし、分散が同じ)正規分布に従うと考えられる、2種類の(それぞれ複数の)標本から、その母集団の平均の大小について論じているのである。

ひとつ例を見てみよう。

例7 仮説検定 (母平均の差の検定)

【問題】 A・B 2 銘柄のたばこのニコチン含有量について調べたところ、銘柄 A のたばこ 10 本については平均 27.0mg、標準偏差 1.7mg であり、銘柄 B のたばこ 7 本については、平均 29.3mg、標準偏差 1.9mg であった。この 2 銘柄の間でニコチンの平均含有量に差があるだろうか。有意水準を 5% とし、仮説検定を行いなさい。

ここで注意して欲しいのは、与えられたデータが標本分散ではなく標本標準偏差であることだ。これは、標本分散の正の平方根をとったものにほかならない。ここに注意して、答え方を見ていこう。

Step 1 A・B 2 銘柄のニコチン含有量の母平均をそれぞれ μ_1, μ_2 とすれば、帰無仮説と対立

仮説は、それぞれ $H_0: \mu_1 = \mu_2$ 、 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ が適当である。

Step 2 ここでは、先ほど述べた 2 標本 t 統計量を用いよう。これは、A・B 2 銘柄のニコチン含有量が母分散の同じ 2 つの正規分布に従うならば、この統計量が自由度 $m+n-2$ の t 分布 $t(m+n-2)$ に従うことがわかっているからである。(公式 12-1 および 2)

ここでは 2 つの母集団の母分散が等しいと仮定しています。

Step 3&4 ここでは、2 ステップを同時に行おう。

では、この統計量に各値を代入していこう t のとる値を t_0 とすると、

公式 12-1・2 において、 $m=10$ 、 $n=7$ 、 $\bar{X}=27.0$ 、 $\bar{Y}=29.3$ 、 $s_1=1.7$ 、 $s_2=1.9$ が代入できるので、

$$t_0 = \frac{27.0 - 29.3}{\sqrt{\frac{9 \times 1.7^2 + 6 \times 1.9^2}{10 + 7 - 2}} \sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{7}}} = -2.618$$

となる。式をよく見ましょう。

ここで、有意水準は $\alpha = 5\%$ となっている。自由度 $10 + 7 - 2 = 15$ の t 分布の片側 2.5% の点の値 $t_{0.025}(15)$ は 2.131 である (数表より)。

したがって、 $t_0 = -2.618 < -2.131$ であるから、 H_0 は棄却される。すなわち、この 2 銘柄の間でニコチンの平均含有量に差があるという結論になる。・・・(答)

問題演習をこなして知識を確かなものにしてほしい。

12.5 いろいろの χ^2 検定

いよいよ最後です。ここは今年からの新出分野ですので試験出題率も高いと思われます。 χ^2 検定、今年はやります。

分割表と独立性の検定

この検定は、同じ調査対象から得た2種類のデータについて、これらに相関関係があるか否かを判断するための仮説検定である。例を挙げて説明しよう。

例8 仮説検定 (分割表と独立性の検定)

【問題】 下の表は、ある大学の工学部の解析と代数の期末試験の成績である。(単位：人)

| | | 解析 | | | 計 |
|----|---|----|---|----|----|
| | | 優 | 良 | 可 | |
| 代数 | 優 | 4 | 2 | 3 | 9 |
| | 良 | 8 | 4 | 6 | 18 |
| | 可 | 6 | 3 | 6 | 15 |
| 計 | | 18 | 9 | 15 | 42 |

解析と代数の成績は独立であるか？有意水準を5%として仮説検定を行いなさい。

ただし、 $\chi^2_{0.05}(4) = 9.488$ とする。

このような表を分割表またはクロス表という。覚えておこう。また、以降行の数、列の数をそれぞれ $r(=3), c(=3)$ と表すものとする。

Step 1 解析と代数の成績が独立であるという仮説を帰無仮説 H_0 としよう。(これまで帰無仮説は等式とすると述べたが、これは例外。このような検定の場合、2つのデータが独立であることを帰無仮説とするのがベスト。対立仮説 H_1 は独立でないこと。) H_0 が正しいとき、理論度数は以下ようになる。

| | | 解析 | | | 計 |
|----|---|------|------|------|----|
| | | 優 | 良 | 可 | |
| 代数 | 優 | 3.86 | 1.93 | 3.21 | 9 |
| | 良 | 7.71 | 3.86 | 6.43 | 18 |
| | 可 | 6.43 | 3.21 | 5.36 | 15 |
| 計 | | 18 | 9 | 15 | 42 |

理論度数は、たとえば、解析も代数の優をとっている人の場合(赤字)

$$42 \times \frac{9}{42} \times \frac{18}{42} = \frac{9 \times 18}{42} = 3.86 \text{ と計算している。他も同様。よく確認しよう。}$$

理論度数は2つのデータが完全に独立であるときに成り立つ理想的な値のことである。

Step 2 統計量は何を使えばよいだろうか。

ここでは、帰無仮説 H_0 を検定するために、次の統計量を用いる。

公式 12-3 χ^2 の統計量

$$\chi^2 = \sum \frac{(\text{観測度数} - \text{理論度数})^2}{\text{理論度数}}$$

ただし、観測度数はそれぞれ理論度数に対応するもの。表中のすべての要素（上の例では9つ）について足し合わせる。

理由は知りません。丸暗記してください。帰無仮説 H_0 が正しいとき、 $n = r \times c$ の値

が非常に大きければ、この χ^2 は近似的に自由度 $(r-1)(c-1)$ の χ^2 分布に従うことが

証明されている。

Step 3&4 では、この χ^2 の値を計算してみよう。

$$\chi^2 = \frac{(4 - 3.86)^2}{3.86} + \frac{(2 - 1.93)^2}{1.93} + \dots + \frac{(6 - 5.36)^2}{5.36} = 0.19$$

となる。

問題では、有意水準が5%となっていた。このとき、この仮説検定では、自由度 $(r-1)(c-1)$ の χ^2 分布の上側パーセント点を用い、これより大きい値の集合を棄却域

とする。この例では、 $\chi^2_{0.05}(4) = 9.488$ である。このような値はおそらく今回のよう

に問題中に与えられる。よって、 $0.19 < 9.488$ なので、帰無仮説 H_0 は棄却されず、代

数と解析の成績に独立性が認められる、となる。……(答)

問題演習をつんで、知識を確かなものにして欲しい。

《本編 完》

---おわりに---

ここまできちんと読んでくださって、本当にありがとうございました。去年のシケプリに比べ、ページ数が倍増しているのは、こちらの完全な力不足です。ごめんなさい。ミスも多いと思います。すいません。

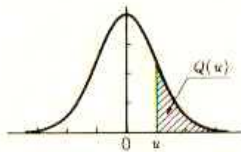
ひととおり読んだら、関連する問題演習を必ず数多くこなしてください。暗記だけではうまくいかないでしょう。

この後、付録といたしまして、正規分布表・t分布表の読み方について、簡単な解説を加えましたのでそちらも御覧下さい。

付録 1 (標準) 正規分布表の読み方

付表 1 正規分布表(上側確率)

$$Q(u) = 1 - \Phi(u) = \int_u^{\infty} \phi(x) dx$$



| # | .00 | .01 | .02 | .03 | .04 | .05 | .06 | .07 | .08 | .09 |
|-----|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|-------------|
| .0 | .50000 | .49601 | .49202 | .48803 | .48405 | .48006 | .47608 | .47210 | .46812 | .46414 |
| .1 | .46017 | .45620 | .45224 | .44828 | .44433 | .44038 | .43644 | .43251 | .42858 | .42465 |
| .2 | .42074 | .41683 | .41294 | .40905 | .40517 | .40129 | .39743 | .39358 | .38974 | .38591 |
| .3 | .38209 | .37828 | .37448 | .37070 | .36693 | .36317 | .35942 | .35569 | .35197 | .34827 |
| .4 | .34458 | .34090 | .33724 | .33360 | .32997 | .32636 | .32276 | .31918 | .31561 | .31207 |
| .5 | .30854 | .30503 | .30153 | .29806 | .29460 | .29116 | .28774 | .28434 | .28096 | .27760 |
| .6 | .27425 | .27093 | .26763 | .26435 | .26109 | .25785 | .25463 | .25143 | .24825 | .24510 |
| .7 | .24196 | .23885 | .23576 | .23270 | .22965 | .22663 | .22363 | .22065 | .21770 | .21476 |
| .8 | .21186 | .20897 | .20611 | .20327 | .20045 | .19766 | .19489 | .19215 | .18943 | .18673 |
| .9 | .18406 | .18141 | .17879 | .17619 | .17361 | .17106 | .16853 | .16602 | .16354 | .16109 |
| 1.0 | .15866 | .15625 | .15386 | .15151 | .14917 | .14686 | .14457 | .14231 | .14007 | .13786 |
| 1.1 | .13567 | .13350 | .13136 | .12924 | .12714 | .12507 | .12302 | .12100 | .11900 | .11702 |
| 1.2 | .11507 | .11314 | .11123 | .10935 | .10749 | .10565 | .10383 | .10204 | .10027 | .098525 |
| 1.3 | .096800 | .095098 | .093418 | .091759 | .090123 | .088508 | .086915 | .085343 | .083793 | .082264 |
| 1.4 | .080757 | .079270 | .077804 | .076359 | .074934 | .073529 | .072145 | .070781 | .069437 | .068112 |
| 1.5 | .066807 | .065522 | .064255 | .063008 | .061780 | .060571 | .059380 | .058208 | .057053 | .055917 |
| 1.6 | .054799 | .053699 | .052616 | .051551 | .050503 | .049471 | .048457 | .047460 | .046479 | .045514 |
| 1.7 | .044565 | .043633 | .042716 | .041815 | .040930 | .040059 | .039204 | .038364 | .037538 | .036727 |
| 1.8 | .035930 | .035148 | .034380 | .033625 | .032884 | .032157 | .031443 | .030742 | .030054 | .029379 |
| 1.9 | .028717 | .028067 | .027429 | .026803 | .026190 | .025588 | .024998 | .024419 | .023852 | .023295 |
| 2.0 | .022750 | .022216 | .021692 | .021178 | .020675 | .020182 | .019699 | .019226 | .018763 | .018309 |
| 2.1 | .017864 | .017429 | .017003 | .016586 | .016177 | .015778 | .015386 | .015003 | .014629 | .014262 |
| 2.2 | .013903 | .013553 | .013209 | .012874 | .012545 | .012224 | .011911 | .011604 | .011304 | .011011 |
| 2.3 | .010724 | .010444 | .010170 | .0999031 | .0996419 | .0993867 | .0991375 | .0988940 | .0986563 | .0984242 |
| 2.4 | .0981975 | .0979763 | .0977603 | .0975494 | .0973436 | .0971428 | .0969469 | .0967557 | .0965691 | .0963872 |
| 2.5 | .0962097 | .0960366 | .0958677 | .0957031 | .0955426 | .0953861 | .0952336 | .0950849 | .0949400 | .0947988 |
| 2.6 | .0946612 | .0945271 | .0943965 | .0942692 | .0941453 | .0940246 | .0939070 | .0937926 | .0936811 | .0935726 |
| 2.7 | .0934670 | .0933642 | .0932641 | .0931667 | .0930720 | .0929798 | .0928901 | .0928028 | .0927179 | .0926354 |
| 2.8 | .0925551 | .0924771 | .0924012 | .0923274 | .0922557 | .0921860 | .0921182 | .0920524 | .0919884 | .0919262 |
| 2.9 | .0918658 | .0918071 | .0917502 | .0916948 | .0916411 | .0915889 | .0915382 | .0914890 | .0914412 | .0913949 |
| 3.0 | .0913499 | .0913062 | .0912639 | .0912228 | .0911829 | .0911442 | .0911067 | .0910703 | .0910350 | .0910008 |
| 3.1 | .0909676 | .0909354 | .0909042 | .0908740 | .0908447 | .0908163 | .0907888 | .09076219 | .09073638 | .09071136 |
| 3.2 | .09068714 | .09066367 | .09064095 | .09061895 | .09059765 | .09057703 | .09055706 | .09053774 | .09051904 | .09050094 |
| 3.3 | .09048342 | .09046648 | .09045009 | .09043423 | .09041889 | .09040406 | .09038971 | .09037584 | .09036243 | .09034946 |
| 3.4 | .09033693 | .09032481 | .09031311 | .09030179 | .09029086 | .09028029 | .09027009 | .09026023 | .09025071 | .09024151 |
| 3.5 | .09023263 | .09022405 | .09021577 | .09020778 | .09020006 | .09019262 | .09018543 | .09017849 | .09017180 | .09016534 |
| 3.6 | .09015911 | .09015310 | .09014730 | .09014171 | .09013632 | .09013112 | .09012611 | .09012128 | .09011662 | .09011213 |
| 3.7 | .09010780 | .09010363 | .09009961 | .09009574 | .090092010 | .090088417 | .090084957 | .090081624 | .090078414 | .090075324 |
| 3.8 | .090072348 | .090069483 | .090066726 | .090064072 | .090061517 | .090059059 | .090056694 | .090054418 | .090052228 | .090050122 |
| 3.9 | .090048096 | .090046148 | .090044274 | .090042473 | .090040741 | .090039076 | .090037475 | .090035936 | .090034458 | .090033037 |
| 4.0 | .090031671 | .090030359 | .090029099 | .090027888 | .090026726 | .090025609 | .090024536 | .090023507 | .090022518 | .090021569 |
| 4.1 | .090020658 | .090019783 | .090018944 | .090018138 | .090017365 | .090016624 | .090015912 | .090015230 | .090014575 | .090013948 |
| 4.2 | .090013346 | .090012769 | .090012215 | .090011685 | .090011176 | .090010689 | .090010221 | .090097736 | .090095347 | .090093037 |
| 4.3 | .090085399 | .090081627 | .090078015 | .090074555 | .090071241 | .090068069 | .090065031 | .090062123 | .090059340 | .090056675 |
| 4.4 | .090054125 | .090051685 | .090049350 | .090047117 | .090044979 | .090042935 | .090040980 | .090039110 | .090037322 | .090035612 |
| 4.5 | .090033977 | .090032414 | .090030920 | .090029492 | .090028127 | .090026823 | .090025577 | .090024386 | .090023249 | .090022162 |
| 4.6 | .090021125 | .090020133 | .090019187 | .090018283 | .090017420 | .090016597 | .090015810 | .090015060 | .090014344 | .090013660 |
| 4.7 | .090013008 | .090012386 | .090011792 | .090011226 | .090010686 | .090010171 | .090099679 | .090099213 | .090098748 | .0900983391 |
| 4.8 | .090079333 | .090075465 | .090071779 | .090068267 | .090064920 | .090061731 | .090058693 | .090055799 | .090053043 | .090050418 |
| 4.9 | .090047918 | .090045538 | .090043272 | .090041115 | .090039061 | .090037107 | .090035247 | .090033478 | .090031792 | .090030190 |

$u=0.00 \sim 4.99$ に対する、正規分布の上側確率 $Q(u)$ を与える。

例: $u=3.18$ に対しては、左の見出し 3.1 と上の見出し .08 との交差点で、 $Q(u)=.0773638=0.00073638$ と読む。

$u=1.96$ に対して $Q(u)=.024998$ 、 $u=2.58$ に対して $Q(u)=.0049400=0.0049400$ となる。分布の両側確率を考えるとき、これらは、それぞれ $2Q(u)=0.049996 \approx 0.05$ 、 $0.00988 \approx 0.01$ に対応する。

縦軸・横軸はデータがとりうる値を示している。縦軸が小数第 1 位まで、横軸が第 2 位を示している。その双方がクロスしたところの値が標準正規分布において、この値よりも上側に値が存在する確率をしめしている。

【例】正規分布において、値が 1.96 よりも大きくなる確率を考えよう。

縦軸は 1.9、横軸は .06 をみる。この 2 つの項目がクロスしているところの値、すなわち、0.24998 が欲しかった確率である。

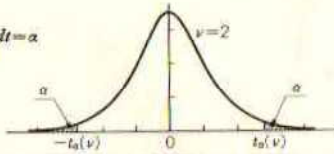
ちなみに、表中の .03 とは、.000 と同値である。他にも同様。

くれぐれも値を探すときは、データを標準化してから探すように。

付録 2 t 分布表の読み方

付表 2 t 分布表(パーセント点)

$$t_{\alpha}(\nu) : \int_{t_{\alpha}(\nu)}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\nu} B\left(\frac{1}{2}, \frac{\nu}{2}\right) \left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{\frac{\nu+1}{2}}} dt = \alpha$$



| α ν | .250 (.500) | .200 (.400) | .150 (.300) | .100 (.200) | .050 (.100) | .025 (.050) | .010 (.020) | .005 (.010) | .0005 (.0010) |
|-------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|------------------|
| 1 | 1.000 | 1.376 | 1.963 | 3.078 | 6.314 | 12.706 | 31.821 | 63.657 | 636.619 |
| 2 | .816 | 1.061 | 1.386 | 1.886 | 2.920 | 4.303 | 6.965 | 9.925 | 31.599 |
| 3 | .765 | .978 | 1.250 | 1.638 | 2.353 | 3.182 | 4.541 | 5.841 | 12.924 |
| 4 | .741 | .941 | 1.190 | 1.533 | 2.132 | 2.776 | 3.747 | 4.604 | 8.610 |
| 5 | .727 | .920 | 1.156 | 1.476 | 2.015 | 2.571 | 3.365 | 4.032 | 6.869 |
| 6 | .718 | .906 | 1.134 | 1.440 | 1.943 | 2.447 | 3.143 | 3.707 | 5.959 |
| 7 | .711 | .896 | 1.119 | 1.415 | 1.895 | 2.365 | 2.998 | 3.499 | 5.408 |
| 8 | .706 | .889 | 1.108 | 1.397 | 1.860 | 2.306 | 2.896 | 3.355 | 5.041 |
| 9 | .703 | .883 | 1.100 | 1.383 | 1.833 | 2.262 | 2.821 | 3.250 | 4.781 |
| 10 | .700 | .879 | 1.093 | 1.372 | 1.812 | 2.228 | 2.764 | 3.169 | 4.587 |
| 11 | .697 | .876 | 1.088 | 1.363 | 1.796 | 2.201 | 2.718 | 3.106 | 4.437 |
| 12 | .695 | .873 | 1.083 | 1.356 | 1.782 | 2.179 | 2.681 | 3.055 | 4.318 |
| 13 | .694 | .870 | 1.079 | 1.350 | 1.771 | 2.160 | 2.650 | 3.012 | 4.221 |
| 14 | .692 | .868 | 1.076 | 1.345 | 1.761 | 2.145 | 2.624 | 2.977 | 4.140 |
| 15 | .691 | .866 | 1.074 | 1.341 | 1.753 | 2.131 | 2.602 | 2.947 | 4.073 |
| 16 | .690 | .865 | 1.071 | 1.337 | 1.746 | 2.120 | 2.583 | 2.921 | 4.015 |
| 17 | .689 | .863 | 1.069 | 1.333 | 1.740 | 2.110 | 2.567 | 2.898 | 3.965 |
| 18 | .688 | .862 | 1.067 | 1.330 | 1.734 | 2.101 | 2.552 | 2.878 | 3.922 |
| 19 | .688 | .861 | 1.066 | 1.328 | 1.729 | 2.093 | 2.539 | 2.861 | 3.883 |
| 20 | .687 | .860 | 1.064 | 1.325 | 1.725 | 2.086 | 2.528 | 2.845 | 3.850 |
| 21 | .686 | .859 | 1.063 | 1.323 | 1.721 | 2.080 | 2.518 | 2.831 | 3.819 |
| 22 | .686 | .858 | 1.061 | 1.321 | 1.717 | 2.074 | 2.508 | 2.819 | 3.792 |
| 23 | .685 | .858 | 1.060 | 1.319 | 1.714 | 2.069 | 2.500 | 2.807 | 3.768 |
| 24 | .685 | .857 | 1.059 | 1.318 | 1.711 | 2.064 | 2.492 | 2.797 | 3.745 |
| 25 | .684 | .856 | 1.058 | 1.316 | 1.708 | 2.060 | 2.485 | 2.787 | 3.725 |
| 26 | .684 | .856 | 1.058 | 1.315 | 1.706 | 2.056 | 2.479 | 2.779 | 3.707 |
| 27 | .684 | .855 | 1.057 | 1.314 | 1.703 | 2.052 | 2.473 | 2.771 | 3.690 |
| 28 | .683 | .855 | 1.056 | 1.313 | 1.701 | 2.048 | 2.467 | 2.763 | 3.674 |
| 29 | .683 | .854 | 1.055 | 1.311 | 1.699 | 2.045 | 2.462 | 2.756 | 3.659 |
| 30 | .683 | .854 | 1.055 | 1.310 | 1.697 | 2.042 | 2.457 | 2.750 | 3.646 |
| 31 | .682 | .853 | 1.054 | 1.309 | 1.696 | 2.040 | 2.453 | 2.744 | 3.633 |
| 32 | .682 | .853 | 1.054 | 1.309 | 1.694 | 2.037 | 2.449 | 2.738 | 3.622 |
| 33 | .682 | .853 | 1.053 | 1.308 | 1.692 | 2.035 | 2.445 | 2.733 | 3.611 |
| 34 | .682 | .852 | 1.052 | 1.307 | 1.691 | 2.032 | 2.441 | 2.728 | 3.601 |
| 35 | .682 | .852 | 1.052 | 1.306 | 1.690 | 2.030 | 2.438 | 2.724 | 3.591 |
| 36 | .681 | .852 | 1.052 | 1.306 | 1.688 | 2.028 | 2.434 | 2.719 | 3.582 |
| 37 | .681 | .851 | 1.051 | 1.305 | 1.687 | 2.026 | 2.431 | 2.715 | 3.574 |
| 38 | .681 | .851 | 1.051 | 1.304 | 1.686 | 2.024 | 2.429 | 2.712 | 3.566 |
| 39 | .681 | .851 | 1.050 | 1.304 | 1.685 | 2.023 | 2.426 | 2.708 | 3.558 |
| 40 | .681 | .851 | 1.050 | 1.303 | 1.684 | 2.021 | 2.423 | 2.704 | 3.551 |
| 41 | .681 | .850 | 1.050 | 1.303 | 1.683 | 2.020 | 2.421 | 2.701 | 3.544 |
| 42 | .680 | .850 | 1.049 | 1.302 | 1.682 | 2.018 | 2.418 | 2.698 | 3.538 |
| 43 | .680 | .850 | 1.049 | 1.302 | 1.681 | 2.017 | 2.416 | 2.695 | 3.532 |
| 44 | .680 | .850 | 1.049 | 1.301 | 1.680 | 2.015 | 2.414 | 2.692 | 3.526 |
| 45 | .680 | .850 | 1.049 | 1.301 | 1.679 | 2.014 | 2.412 | 2.690 | 3.520 |
| 46 | .680 | .849 | 1.048 | 1.300 | 1.679 | 2.013 | 2.410 | 2.687 | 3.515 |
| 47 | .680 | .849 | 1.048 | 1.300 | 1.678 | 2.012 | 2.408 | 2.685 | 3.510 |
| 48 | .680 | .849 | 1.048 | 1.299 | 1.677 | 2.011 | 2.407 | 2.682 | 3.505 |
| 49 | .680 | .849 | 1.048 | 1.299 | 1.677 | 2.010 | 2.405 | 2.680 | 3.500 |
| 50 | .679 | .849 | 1.047 | 1.299 | 1.676 | 2.009 | 2.403 | 2.678 | 3.496 |
| 60 | .679 | .848 | 1.045 | 1.296 | 1.671 | 2.000 | 2.390 | 2.660 | 3.460 |
| 80 | .678 | .846 | 1.043 | 1.292 | 1.664 | 1.990 | 2.374 | 2.639 | 3.416 |
| 120 | .677 | .845 | 1.041 | 1.289 | 1.658 | 1.980 | 2.358 | 2.617 | 3.373 |
| 240 | .676 | .843 | 1.039 | 1.285 | 1.651 | 1.970 | 2.342 | 2.596 | 3.332 |
| ∞ | .674 | .842 | 1.036 | 1.282 | 1.645 | 1.960 | 2.326 | 2.576 | 3.291 |

自由度 $\nu=1(1), 50, 60, 80, 120, 240, \infty$ の t 分布について、特定の片側確率 α (両側では 2α) に対応する t の値を与える。これを t 分布の 100α パーセント点とよび、 $t_{\alpha}(\nu)$ で表す。 $\nu=\infty$ のときの値は、正規分布のパーセント点と一致する。
例：自由度 $\nu=20$ の両側 5 パーセント点 ($\alpha=0.025$) は、 $t_{0.025}(20)=2.086$ である。

縦軸は t 分布の自由度、横軸は確率を示している。双方がクロスしたところの値が、自由度の t 分布における、100%における上側(片側)パーセント点である。
なお、横軸中のカッコは、仮説検定を両側対立仮説で行う場合のために、参考に書かれた値である。

【例】自由度 10 の t 分布において、5%における上側パーセント点を求めよう。
縦軸は 10、横軸は .050 をみる。この 2 つの項目がクロスしているところの値、すなわち、1.812 が欲しかったパーセント点である。

何度も使って使い方を確かめよう。

東京大学教養学部 (前期) 講義 2008 年度夏学期
基礎統計 (福地 純一郎) シケブリ

2008 年度入学 理科一類 20 組 基礎統計 (木 4) シケ対 編

無断転載・改変は認めるが、内容に対する責任を製作者は一切負わない

また、改変した場合はその旨を明記すること。

2007.7/20