2011. 夏

１１年度前期２年理科 II, III 類 18-23 組

数理科学 II, 定期試験, １１年７月２７日　河澄響矢

解答は別紙に、計算用紙２枚。筆記用具以外持ち込み不可。

問題 1. 次の微分方程式を考える。(講義で証明した事実は証明なしに用いてよい。)

$$x^{(4)}(t) + x^{(2)}(t) + x(t) = 0$$

(1) この方程式をみたす複素数値函数 $x(t)$ 全体のなす複素ベクトル空間の基底を与えよ。
(2) この方程式をみたす実数値函数 $x(t)$ 全体のなす実ベクトル空間の基底を与えよ。

問題 2. 次の Riccati 方程式を考える:

$$(t+1)x'(t) - 2t(t+1)^2 - x(t) + 2tx(t)^2 = 0.$$

(1) この方程式をみたす一次函数 $x(t) = at + b$, a, b 定数, をすべて求めよ。
(2) この方程式の一般解を求めよ。

問題 3. $\exp(t\begin{pmatrix} -47 & 42 \\ -56 & 50 \end{pmatrix})$, $t \in \mathbb{R}$, を計算せよ。

問題 4. λ, μ を相異なる複素数とする。複素数に値をもつ未知函数 $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ についての方程式系

$$\begin{aligned} x'(t) &= \lambda x(t) + y(t) \\ y'(t) &= \lambda y(t) + z(t) \\ z'(t) &= \lambda z(t) + e^{\mu t} \end{aligned}$$

の解をすべて求めよ。

問題 5. 次の微分方程式の一般解を求め、有理函数、指数函数などを用いて表せ:

$$t(t-1)x''(t) + (1+t)x'(t) - x(t) = 0.$$

問題 6. 何回でも微分できる実数値函数 $x: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(t, u) \mapsto x(t, u)$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$, が次の関係式をみたすものとする。

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} x(t, u) = f(x(t, u)) \\ &x(0, u) = u \end{aligned}$$

このとき次を証明せよ。

(1) すべての $t, s, u \in \mathbb{R}$ について $x(t+s, u) = x(t, x(s, u))$ が成り立つ。
(2) ある t_0 について $x(t_0, u) = x(t_0, v)$ ならば $u = v$ が成り立つ。

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

解答-かっすみ〜ん♪微分方程式はじまるよ〜-

解答１　(1)　$P(z) = z^4 + z^2 + 1$ とおくと、問題 1 の微分方程式は、$P(\frac{d}{dt})x(t) = 0$ となるので $P(z)$ を因数分解することを考える。

$t^2 + t + 1 = 0$ の解は

$$\frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} = e^{\frac{2i\pi}{3}}, e^{\frac{4i\pi}{3}}$$

なので、

$$P(z) = (z^2 - e^{\frac{2i\pi}{3}})(z^2 - e^{\frac{4i\pi}{3}}) = (z - e^{\frac{i\pi}{3}})(z + e^{\frac{i\pi}{3}})(z - e^{\frac{2i\pi}{3}})(z + e^{\frac{2i\pi}{3}}) = (z - (\frac{1+\sqrt{3}i}{2}))(z + (\frac{1+\sqrt{3}i}{2}))(z - (\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}))(z + (\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}))$$

となる。よって、問題 1 の微分方程式の基底は以下となる。

$$\{e^{(\frac{1+\sqrt{3}i}{2})t}, e^{(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2})t}, e^{(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2})t}, e^{(\frac{1-\sqrt{3}i}{2})t}\}$$

(2)　共役のペアで以下のように新しく基底を作ります。

$$e^{(\frac{1+\sqrt{3}i}{2})t} = e^{\frac{1}{2}t}(\cos\frac{\sqrt{3}}{2})t + i\sin\frac{\sqrt{3}}{2})t)$$

$$e^{(\frac{1-\sqrt{3}i}{2})t} = e^{\frac{1}{2}t}(\cos\frac{\sqrt{3}}{2})t - i\sin\frac{\sqrt{3}}{2})t)$$

より、

$$\frac{e^{(\frac{1+\sqrt{3}i}{2})t} + e^{(\frac{1-\sqrt{3}i}{2})t}}{2} = e^{\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

$$\frac{e^{(\frac{1+\sqrt{3}i}{2})t} - e^{(\frac{1-\sqrt{3}i}{2})t}}{2i} = e^{\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

の二つが新しく基底となる。同様にもう二つの基底を作ることで以下のものが基底となる。

$$\{e^{\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t, e^{\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t, e^{\frac{-1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t, e^{\frac{-1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\}$$

解答２　リッカチの方程式は P, Q, R, S, x を t の関数として、

$$P\dot{x} + Q + Rx + Sx^2 = 0$$

の微分方程式です。そしてその特別解を x_0 とすると、一般解 x は $x = y + x_0$ とあらわされ、それを元の式に代入して、整理すると、

$$P\dot{y} + (R + 2x_0S)y + Sy^2 = 0$$

となります。これは、ベルヌーイの方程式になり、$y = w^{-1}$ とおくと、解きやすい形になります。

また、普通の一回の微分方程式

$$\dot{x} = Px + Q$$

では、$F = \int P$ とおくと、

$$\frac{d}{dt}(e^{-F}x) = -Pe^{-F}x + e^{-F}\dot{x} = -Pe^{-F}x + e^{-F}Px + e^{-F}Q = e^{-F}Q$$

$$\therefore x = e^F \int e^{-F}Q$$

で与えられます。

(1) $x=at+b$(a,b は実数) とすると、

$$a(t+1)-2t(t+1)^2-(at+b)^2+2t(a^2t^2+2abt+b^2)=0$$

となる。各自 t の係数について、恒等式を立てると

$$3\cdots-2+2a^2=0$$

$$2\cdots-4+4ab=0,$$

$$1\cdots a-2-a2b^2=0,$$

$$0\cdots a-b=0$$

$$\therefore a=b=\pm 1$$

$$\text{よって答えは } x=t+1,-t-1$$

(2) 特別解が $x_0=t+1$ の時。上の概略で言ったことにより、$x=y+x_0$ とすると、y についての微分方程式は

$$(t+1)\dot{y}+(-1+4t(t+1))y+2ty^2=0$$

$$\therefore \dot{y}+(4t-\frac{1}{t+1})y+\frac{2t}{t+1}y^2=0$$

よって、$y=w^{-1}$ とおくと、

$$\frac{-1}{w^2}\dot{w}+(4t-\frac{1}{t+1})w^{-1}+\frac{2t}{t+1}w^{-2}=0 \qquad \therefore \dot{w}=(4t-\frac{1}{t+1})w+\frac{2t}{t+1}$$

上の概略により $F=\int 4t-\frac{1}{t+1}=2t^2-\log(t+1)$ より、

$$w=e^F\int e^{-F}\frac{2t}{t+1}=e^F\int e^{-2t^2}(t+1)\frac{2t}{t+1}=\frac{e^{2t^2}}{t+1}\int 2te^{-2t^2}=\frac{e^{2t^2}}{t+1}(\frac{-1}{2}e^{-2t^2}+C)=\frac{1}{t+1}(\frac{-1}{2}+Ce^{2t^2})$$

よって、答えは

$$x=y+x_0=w^{-1}+x_0=(t+1)+\frac{t+1}{Ce^{2t^2}-\frac{1}{2}}$$

同様にして、$x_0=-t-1$ の時も同じようなことをすると解は、

$$x=-(t+1)+\frac{t+1}{Ce^{-2t^2}+\frac{1}{2}}$$

となる。

(答え)

$$x=(t+1)+\frac{t+1}{Ce^{2t^2}-\frac{1}{2}}, -(t+1)+\frac{t+1}{Ce^{-2t^2}+\frac{1}{2}} \quad (C\text{ は任意定数})$$

解答 3 【概略】$n\times n$ 行列を A,D,P とし、

$$D=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}$$

の形のとする。今、$A=PDP^{-1}$ なら、

$$\exp(tA)=P\exp(tD)P^{-1}$$

であり

$$\exp(tD)=\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

である。

問題に戻ると、$A=\begin{pmatrix} -47 & 42 \\ -56 & 50 \end{pmatrix}$ とすると、対角化することを考える。

$$\begin{vmatrix} t+47 & -42 \\ 56 & t-50 \end{vmatrix}=(t+47)(t-50)-42\times 56=t^2-3t+2=(t-2)(t-1)=0$$

よって、A の固有値は 2,1。

固有値が 2 の時は

$$\begin{pmatrix} 49 & -42 \\ 56 & -48 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{より、} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$$

固有値が 1 の時は

$$\begin{pmatrix} 48 & -42 \\ 56 & -49 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{より、} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

よって、$P=\begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} D=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とすると、$A=PDP^{-1}$ で、

$$P^{-1}=\frac{1}{6\times 8-7\times 7}\begin{pmatrix} 8 & -7 \\ -7 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -8 & 7 \\ 7 & -6 \end{pmatrix}$$

となるので、

$$\exp(tA)=P\exp(tD)P^{-1}=\begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -8 & 7 \\ 7 & -6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -48e^{2t}+49e^{t} & 42e^{2t}-42e^{t} \\ -56e^{2t}+56e^{t} & 49e^{2t}-48e^{t} \end{pmatrix}$$

解答 4　$n\times n$ 行列を A とし、n 次縦ベクトルを v,ξ_0, A の固有値でない実数を μ とし、

$$\dot{v}=Av+e^{\mu t}\xi_0$$

という微分方程式の解は、任意に n 次縦ベクトル v_0 と取って、

$$e^{tA}v_0+(\mu I-A)^{-1}\xi_0 e^{\mu t}$$

で与えられる。

問題の微分方程式は、

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}+e^{\mu t}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

より、

$$A=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

とおくと、

$$e^{tA} = e^{\lambda t}\begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である。また、特別解は、$(\mu I - A)^{-1}$ を求めると、(この逆行列を求めるのはかなりめんどくさいですが余因子展開、もしくは掃き出し法を用いて適宜数学 II のノートを参照しながら頑張ってください)

$$(\mu I - A)^{-1} = \frac{1}{(\mu-\lambda)^3}\begin{pmatrix} (\mu-\lambda)^2 & (\mu-\lambda) & 1 \\ 0 & (\mu-\lambda)^2 & (\mu-\lambda) \\ 0 & 0 & (\mu-\lambda)^2 \end{pmatrix}$$

より、この微分方程式系の特別解は

$$(\mu I - A)^{-1}e^{\mu t}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{e^{\mu t}}{(\mu-\lambda)^3}\begin{pmatrix} 1 \\ (\mu-\lambda) \\ (\mu-\lambda)^2 \end{pmatrix}$$

よって答えは、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = e^{\lambda t}\begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \frac{e^{\mu t}}{(\mu-\lambda)^3}\begin{pmatrix} 1 \\ (\mu-\lambda) \\ (\mu-\lambda)^2 \end{pmatrix} (\text{ただし、} x_0, y_0, z_0 \text{は任意の実数})$$

【注】

友達によると、行列で解くよりも普通に z の微分方程式から順々に解いていくほうが速いらしいです。(本当かわかんないけど)

解答 5　級数解をもちいます。

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n t^n$$

と書けるとすると、これを微分方程式に代入して、

$$\begin{aligned} &\sum_{n=2}^{\infty}(t(t-1)\frac{d^2}{dt^2} + (1+t)\frac{d}{dt} - 1)(P_n t^n) + (t(t-1)\frac{d^2}{dt^2} + (1+t)\frac{d}{dt} - 1)(P_1 t + P_0) \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} t(t-1)n(n-1)P_n t^{n-2} + (t+1)nP_n t^{n-1} - P_n t^n + P_1 - P_0 \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} t^n P_n(n^2-1) + t^{n-1}P_n n(2-n) + P_1 - P_0 \end{aligned}$$

よってあとは、t の n 次係数を見ていけばよい。

$$0 \cdots P_1 - P_0 = 0$$

$$1 \cdots P_2 \times 2 \times (2-2) = 0$$

$$n \geq 2 \cdots P_n(n^2-1) + P_{n+1}(n+1)(1-n) = 0$$

$n \geq 2$ のとき、

$$P_n(n^2-1) + P_{n+1}(n+1)(1-n) = (n-1)(n+1)P_n - (n-1)(n+1)P_{n+1} = (n-1)(n+1)(P_n - P_{n+1}) = 0$$

$n \geq 2$ より $(n-1)(n+1) \neq 0$ のため

$$n \geq 2 \text{ のとき } P_n = P_{n+1}$$

以上より、

$$P_0 = P_1 \ \ (P_0\text{は任意})$$

$$n \geq 2 \text{ なら、} P_n = P_2 \ \ (P_2\text{は任意})$$

よって求めるべき解は

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n t^n = P_2 \sum_{n=0}^{\infty} t^n + (P_0 - P_2)(t+1) = C_1(t+1) + C_2 \frac{1}{1-t} \ \ (C_1, C_2\text{はともに任意定数})$$

【注】

友達から聞いた別解として $x = (t+1)g$ とおくことにより、$\dot{g}$ の微分方程式になるのでこれの解をもとめ、さらに積分をすると同じ答えがでます。しかし、僕も解いてみたところ、部分積分が無双しますので、かなりしんどかったです。

解答 6　【概略】微分方程式の解の初期値問題を使います。どちらも t に関する微分方程式は同じなので、ある一点 t_0 で同じ値をとれば（初期値が同じだったら）その方程式 $x(t,u)$ はすべての t で一致します。

(1)　すべての $s, u \in \mathbf{R}$ に対し t についての微分方程式は一致していて初期値は、$t = 0$ を入れてみると

$$x(0+s,u) = x(s,u)\ ,\ x(0, x(s,u)) = x(s,u) \text{ より}$$

$$\therefore x(0+s,u) = x(0, x(s,u))$$

よって微分方程式の解の初期値問題よりすべての $t, s, u \in \mathbf{R}$ で $x(t+s,u) = x(t, x(s,u))$ となる。

(2)　上の概略より、ある一点 t_0 で同じ値をとれば, すべての t においてその方程式は一致するので $t = 0$ でも値が一致する。よって、

$$x(0.u) = x(0,v)$$

$$\therefore u = v$$