数理科学 I -関口英子- 名状しがたいシケプリのようなもの

数理科学 I の問題を集めました。授業で出ていた問題もありますし、自分で作った問題もあります。解答も後ろに載せておいたので、活用してくたら嬉しいです。

問題 1 (陰関数定理) 次の関係式を満たす陰関数 y の一階微分が存在する条件と、y を x の関数と見て、x に関する微分 y', y'' を求めよ。

(1) $1 + xe^y - y = 0$
(2) $x^3y^3 + y - x = 0$

問題 2 (逆関数定理) 次の関係式で x, y が u, v の関数にかけているとき逆関数が存在する条件と、逆関数の微分つまり u, v を x, y の関数と見てその微分

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

を求めよ。

(1) $x = u\cos v\ ,\ y = u\sin v$
(2) $x = uv\ ,\ y = u^3 + v^3$

問題 3 (Hessian) 次の x, y の関数の極値を求めよ。(ただし a は実数とする。)

(1) $f(x, y) = xy(x^2 + y^2 - 1)$
(2) $f(x, y) = xy + \frac{a}{x} + \frac{a}{y}$

問題 4 (条件付き極値) x, y が $x^3 - 3xy + y^3 = 0$ をみたしながら動くとき $f(x, y) = x^2 + y^2$ の極値を求めよ。

問題 5 (積分の変数変換) 次の積分を求めよ。(ただし m は実数とする。)

(1) $\int_D \sqrt{x}dxdy$
$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | x^2 + y^2 \le x\}$
(2) $\int_D (x^2 + y^2)^{-m}dxdy$
$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}$

問題 6 (広義積分) n は 2 以上の自然数とする。

$$E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | 0 \le x \le 1\ ,\ 0 \le y \le 1\}$$

$$V_n^{(1)} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | 0 < x < 1\ ,\ \frac{1}{n} < y < 1\}$$

$$V_n^{(2)} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | \frac{1}{n} < x < 1\ ,\ 0 < y < \frac{1}{n}\}$$

$$V_n = V_n^{(1)} \cup V_n^{(2)}$$

$$f(x, y) = (x + y)^{\frac{-3}{2}}$$

とする。以下の問いに答えよ。

(1) $\int_{V_n^{(1)}} f(x, y)dxdy$ を求めよ。
(2) $\int_{V_n^{(2)}} f(x, y)dxdy$ を求めよ。
(3) $\int_E f(x, y)dxdy$ を求めよ。

問題 7 (線積分、Green の定理) 点 A(1,0)、点 B(-1,0) とし A から B へ次のルート γ で行くとする。このとき次の線積分

$$(\sharp) \cdots \int_\gamma (x^2 + y^2)dx + xdy$$

を考える。以下の問いに答えよ。

(1) γ が線分 AB のとき、($\sharp$) を求めよ。
(2) γ が半径 1 の円の上半分 (反時計回りに回るルート) のとき、($\sharp$) を求めよ。
(3) γ が半径 1 の円の下半分 (時計回りに回るルート) のとき、($\sharp$) を求めよ。
(4) 今、A $\to$ B $\to$ A と半径 1 の円を反時計回りに回るルート行くことを考える。これを δ とし、δ は半径 1 の円を D^2 とするとき、$\partial D^2 = \delta$ となる。これを考慮して Green の定理が今回の例でも成り立っていることを確認せよ。つまり、

$$\int_\delta (x^2+y^2)dx+xdy = \int_{D^2} -\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2)dxdy+\frac{\partial}{\partial x}(x)dxdy$$

が成り立つことを確認せよ。

問題 8 (曲面の面積、面積分、Gauss の定理)

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

上の面積分を考える。そのために

$$(S^2)^+ = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\ ,\ z > 0\}$$

$$(S^2)^- = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 | x^2+y^2+z^2 = 1\ ,\ z < 0\}$$

$$E = \{(\theta,\varphi) \in \mathbf{R}^2 | 0 < \theta < \pi\ ,\ 0 \le x < 2\pi\}$$

$$D^2 = \{(r,\rho) \in \mathbf{R}^2 | 0 < r \le 1\ ,\ 0 \le \rho < 2\pi\}$$

とし、写像を

$$\begin{array}{llll} \Phi: & E & \to & S^2 \\ & (\theta,\varphi) & \mapsto & (x,y,z) = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta) \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \Psi^+: & D^2 & \to & (S^2)^+ \\ & (r,\rho) & \mapsto & (x,y,z) = (r\cos\rho, r\sin\rho, \sqrt{1-r^2}) \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \Psi^-: & D^2 & \to & (S^2)^- \\ & (r,\rho) & \mapsto & (x,y,z) = (r\cos-\rho, r\sin-\rho, \sqrt{1-r^2}) \end{array}$$

とする。次の問いに答えよ。

(1) Φ を使うことで S^2 の面積を求めよ。

(2) Ψ^+ , Ψ^- を使うことで $(S^2)^+$, $(S^2)^-$ の面積を求め、それらの和が (1) の答えに一致することを確かめよ。

(3) 曲面 S^2 を与えるパラメーター (θ , φ) と (r ,ρ) が同じ向きを与えることを示せ。

(4) $\int_{S^2} xdydz + ydzdx + zdxdy$ を求めよ。

(5) $D^3 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 | 0 \le x^2+y^2+z^2 \le 1\}$ とするとき、$\partial D^3 = S^2$ である。このことより Gauss の定理が成り立つことを確かめよ。つまり、

$$\int_{S^2} xdydz + ydzdx + zdxdy$$

$$= \int_{D^3} \frac{\partial}{\partial x} xdxdydz + \frac{\partial}{\partial y} ydydzdx + \frac{\partial}{\partial z} zdxdydz$$

が成り立つことを確かめよ。

問題 9 (接ベクトル、法ベクトル、曲率) 次の曲線のパラメーター t における接ベクトル、法ベクトル、曲率を求めよ。(ただし a は正の実数であるとする)

(1) $(x,y) = (a\cos t, a\sin t)$

(2) $(x,y) = (t,t^2)$

(3) $(x,y) = (e^{-t}, e^t)$

解答

解答 1 y を x の関数として微分するだけの簡単なお仕事です。ただしその際左辺の関数を $F(x,y)$ とするとき、$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} \neq 0$ である必要があります。

(1) $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = xe^y - 1 \neq 0$ が陰関数が存在する条件で、左辺を x で微分すると、

$$e^y + xe^y y' - y' = 0 \cdots (\sharp)$$

$$\therefore y' = \frac{-e^y}{xe^y - 1}$$

今度は ($\sharp$) の式をもう一回 x で微分することにより、

$$e^y y' + e^y y' + xe^y (y')^2 + xe^y y'' - y'' = 0$$

$$\therefore y'' = \frac{-(2e^y y' + xe^y (y')^2)}{xe^y - 1}$$

$$= \frac{-e^y(xe^y - 2)}{(xe^y - 1)^3}$$

$$(= \frac{-e^y(y-3)}{(y-2)^3} \quad (xe^y = y - 1 \text{ より}))$$

(2) 上と同様にすると $3x^3y^2 + 1 \neq 0$ の時に陰関数が存在し、

$$y' = \frac{1 - 3x^2y^3}{3x^3y^2 + 1}$$

$$y'' = \frac{-6xy(x^2 + y^2 + 3xy - 3x^3y^4 + 3x^4y^3 - 9x^6y^6)}{(3x^3y^2 + 1)}$$

解答 2 逆関数が存在する条件は

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$$

であり、逆関数の微分は

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}^{-1}$$

で与えられます。

(1)

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos v & -u\sin v \\ \sin v & u\cos v \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = u$$

より、逆関数が存在する条件は $u \neq 0$ で逆関数の微分は、

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{u}\begin{pmatrix} u\cos v & u\sin v \\ -\sin v & \cos v \end{pmatrix}$$

(2) 同様にして、

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v & u \\ 3u^3 & 3v^3 \end{pmatrix}$$

よって、

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} &= 3v^4 - 3u^4 \\ &= 3(v-u)(v+u)(v^2+u^2) \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

$$\therefore v \neq u \text{ かつ } v \neq -u$$

が逆関数が存在する条件で、逆関数の微分は

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{3(v-u)(v+u)(v^2+u^2)}\begin{pmatrix} 3v^3 & -u \\ -3u^3 & v \end{pmatrix}$$

解答 3 f を C^2級の関数とする。
$a(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ $b(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ $c(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ とおき

$$Hess(f) = \begin{pmatrix} a(x,y) & b(x,y) \\ b(x,y) & c(x,y) \end{pmatrix}$$

とするとし、$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} = 0$ なる点 (x_0, y_0) とするとき、

(i) $a(x_0,y_0) > 0$ かつ $a(x_0,y_0)c(x_0,y_0) - b(x_0,y_0)^2 > 0$ なら極小点

(ii) $a(x_0,y_0) < 0$ かつ $a(x_0,y_0)c(x_0,y_0) - b(x_0,y_0)^2 > 0$ なら極大点

(iii) $a(x_0,y_0)c(x_0,y_0) - b(x_0,y_0)^2 < 0$ なら鞍点 (saddle point)

となる。ちなみに上の判定法に当てはまらない点のときにはこの判定法は使えません。しかし、そんな例はまず出ないので安心してください。

(1)

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} = 3x_0^2 y_0 + y_0^3 - y_0 = 0$$
$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} = x_0^3 + 3x_0 y_0^2 - x_0 = 0$$

より、極値を取るかもしれない可能性のある点は

$$(0,0), (0,\pm 1), (\pm 1, 0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (-\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}),$$

となる。また Hessian は

$$Hess(f) = \begin{pmatrix} 6xy & 3x^2+3y^2-1 \\ 3x^2+3y^2-1 & 6xy \end{pmatrix}$$

よって、極値を取るかもしれない可能性のある点について調べると、

$(0,0)$ の時、$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdots$ 鞍点 ($saddlepoint$)

$(0,\pm 1)$, $(\pm 1, 0)$ の時、$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdots$ 鞍点 ($saddlepoint$)

$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ の時、$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \cdots$ 極小点

$(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ の時、$\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \cdots$ 極大点

以上より、答えは

$$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \text{ の時、極小値} -\frac{1}{8} \text{をとり、}$$

$$(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \text{ の時、極大値} \frac{1}{8} \text{をとる。、}$$

(2) 同様にすると (a による場合分けが生じます。) 答えは

$$a = 0 \text{ の時、極値はない。}$$

$$a \neq 0 \text{ の時、} (\sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{a}) \text{ の点で極小値 } 3\sqrt[3]{a^2} \text{をとる。}$$

解答 4 x, y が $g(x,y) = 0$ を満たしながら動くとき $f(x,y)$ の極値を取る点 (x_0, y_0) は、

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial y} - \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial x} = 0$$

を満たす。これがわかりにくい人は Lagrange の未定乗数法というのでもかまいません。Lagrange の未定乗数法とは極値を取る点 (x_0, y_0) ではある実数 λ が存在して

$$(\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}) = \lambda(\frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial x}, \frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial y})$$

が成立する。(余計なことを言うと f の微分を Df とあらわすと λを横ベクトルとして$\mathrm{Df} = \lambda Dg$ が成

立するということです。)
よって、今回の例では極値を取る点 $(x_0\ ,y_0)$ で

$$2x_0(3y_0^2-3x_0)-2y_0(3x_0^2-3y_0)=0$$

となるので、これと、$g(x_0,y_0)=0$ と組み合わせることで

$$(x_0,y_0)=(0,0),(3,3)$$

が極値を取る点である。よって答えは

$(0,0)$ の時、$f(0,0)=0$ という極小値をとり、

$(3,3)$ の時、$f(3,3)=18$ という極大値をとる。

解答 5 どちらも極座標変換をします。

(1) 極座標変換すると、$0<r^2\le r\cos\theta$ より $0<r<\cos\theta,-\frac{\pi}{2}<\theta<\pi_{\overline{2}}$ となるので

$$E=\{(r,\theta)\in\mathbf{R}^2|0<r<\cos\theta,-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\}$$

とおくと、積分は

$$\begin{aligned}\int_D\sqrt{x}dxdy&=\int_E\sqrt{r\cos\theta}rdrd\theta\\&=\int_{-}\pi_{\overline{2}}\pi_{\overline{2}}\cos^{\frac{1}{2}}\theta d\theta\int_0^{\cos\theta}r^{32}dr\\&=\frac{2}{5}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta d\theta\\&=\frac{4}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\theta)\cos\theta d\theta\\&=\frac{4}{5}\int_0^1(1-t^2)dt\\&=\frac{4}{5}(1-\frac{1}{3})\\&=\frac{8}{15}\end{aligned}$$

(2) 同様にすると、(m による場合分けが生じます)

$$m=1\text{ の時、}2\pi\log 2$$

$$m\neq 1\text{ の時、}\pi\frac{2^{2(1-m)}-1}{(1-m)}$$

解答 6 ようするに $\overline{V}_n$ の時の積分の値を求めておいて $n\to\infty$ すれば $\int_{\overline{E}}f(x,y)dxdy$ の値になります。

(1) 普通に計算すると、(めんどくさいので答えのみです)

$$\int_{\overline{V_n^{(1)}}}f(x,y)dxdy=1-\sqrt{2}-(\frac{1}{n})^{\frac{1}{2}}+(1+\frac{1}{n})^{\frac{1}{2}}$$

(2) 上と同様にして

$$\int_{\overline{V_n^{(2)}}}f(x,y)dxdy=1-(\frac{1}{n})^{\frac{1}{2}}-(1+\frac{1}{n})^{\frac{1}{2}}+(\frac{2}{n})^{\frac{1}{2}}$$

(3) $\overline{V}_n$ の時の積分の値を求めておいて $n\to\infty$ します。

$$\begin{aligned}\int_{\overline{E}}f(x,y)dxdy&=\lim_{n\to\infty}\int_{\overline{V_n}}f(x,y)dxdy\\&=\lim_{n\to\infty}\{\int_{\overline{V_n^1}}f(x,y)dxdy\\&+\int_{\overline{V_n^2}}f(x,y)dxdy\}\\&=\lim_{n\to\infty}\{2-\sqrt{2}-2(\frac{1}{n})^{\frac{1}{2}}+(\frac{2}{n})^{\frac{1}{2}}\}\\&=2-\sqrt{2}\end{aligned}$$

解答 7 $(x,y)=(x(t),y(t))$; $t:a\to b$ (ただしこのパラメーターづけで動く向きは変わらないとする。) とパラメーター表示されているときには、線積分は

$$\int_\gamma P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_a^b P(x(t),y(t))\frac{dx}{dt}dt+Q(x(t),y(t))\frac{dy}{dt}dt$$

となります。また Green の定理とは境界つき二次元有界領域を D とし ∂D を D の境界上で D を左手にみて動くルートとすると

$$\int_{\partial D}P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_D-\frac{\partial P}{\partial y}dxdy+\frac{\partial Q}{\partial y}dxdy$$

が成立する定理です。

(1)

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t\\0\end{pmatrix}\ ;\ t:1\to-1$$

とパラメーター付けできるので線積分は

$$\int_\gamma(x^2+y^2)dx+xdy=\int_1^{-1}t^2dt\quad=-\frac{2}{3}$$

(2)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \ ; \ \theta : 0 \to \pi$$

とパラメーター付けできるので線積分は

$$\begin{aligned}
\int_\gamma (x^2+y^2)dx + xdy &= \int_0^\pi -\sin\theta d\theta + \cos^2\theta d\theta \\
&= \int_0^\pi \{-\sin\theta + \frac{1+\cos 2\theta}{2}\} d\theta \\
&= [\cos\theta + \frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4}]_0^\pi \\
&= \frac{\pi}{2} - 2
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \ ; \ \theta - \pi \to 0$$

とパラメーター付けできるので線積分は

$$\begin{aligned}
\int_\gamma (x^2+y^2)dx + xdy &= \int_0^{-\pi} -\sin\theta d\theta + \cos^2\theta d\theta \\
&= -\frac{\pi}{2} - 2
\end{aligned}$$

(4) δ は (2) のルートを γ_2 とし (3) のルートを γ_3 とすると、$\delta = \gamma_2 - \gamma_3$ となります。(要するに半径 1 の円を点 A を出発点として反時計回りに一周するルートです) よって左辺は

$$\begin{aligned}
\int_\delta (x^2+y^2)dx + xdy &= \int_{\gamma_2} (x^2+y^2)dx + xdy \\
&\quad + \int_{-\gamma_3} (x^2+y^2)dx + xdy \\
&= \frac{\pi}{2} - 2 - (-\frac{\pi}{2} - 2) \\
&= \pi
\end{aligned}$$

また右辺は普通に計算して

$$\begin{aligned}
&\int_{D^2} -\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2)dxdy + \frac{\partial}{\partial x}(x)dxdy \\
&= \int_{D^2} (1-2y)dxdy \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1-2r\cos\theta)rdrd\theta \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta[\frac{1}{2}r^2 - \frac{2}{3}r^3\cos\theta]_0^1 \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta\{\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\cos\theta\} \\
&= \pi
\end{aligned}$$

よって両者とも π でひとしくなる。

解答 8 今、曲面の方程式が

$$\begin{array}{llll}
\Phi: & A & \to & \Phi(A) \\
& (u,v) & \mapsto & (x,y,z) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))
\end{array}$$

で与えられているとき、

$$\mathbf{D_u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x(u,v)}{\partial u} \\ \frac{\partial y(u,v)}{\partial u} \\ \frac{\partial z(u,v)}{\partial u} \end{pmatrix}, \ \mathbf{D_v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x(u,v)}{\partial v} \\ \frac{\partial y(u,v)}{\partial v} \\ \frac{\partial z(u,v)}{\partial v} \end{pmatrix}$$

とすると、曲面の面積は

$$\int_A \sqrt{(\|\mathbf{D_u}\|)^2(\|\mathbf{D_v}\|)^2 - (\mathbf{D_u}\cdot\mathbf{D_v})^2} dudv$$

で与えられる。($\|\cdot\|$ はノルム、距離、長さのことで、$\cdot$ は標準内積とする) また、

$$\frac{\partial(x(u,v), y(u,v))}{\partial u, v} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial x(u,v)}{\partial v} \\ \frac{\partial y(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial y(u,v)}{\partial v} \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial(y(u,v), z(u,v))}{\partial u, v} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial y(u,v)}{\partial v} \\ \frac{\partial z(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial z(u,v)}{\partial v} \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial(z(u,v), x(u,v))}{\partial u, v} = \begin{vmatrix} \frac{\partial z(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial z(u,v)}{\partial v} \\ \frac{\partial x(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial x(u,v)}{\partial v} \end{vmatrix}$$

とすると、面積分は

$$\begin{aligned}
&\int_{\Phi(A)} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy \\
&= \int_A P(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\frac{\partial(y(u,v), z(u,v))}{\partial u, v}dudv \\
&+ Q(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\frac{\partial(z(u,v), x(u,v))}{\partial u, v}dudv \\
&+ R(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\frac{\partial(x(u,v), y(u,v))}{\partial u, v}dudv
\end{aligned}$$

と計算が出来る。

曲面の向きが同じとは曲面がパラメーター (u,v) と (s,t) で与えられているときに

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)} > 0$$

となることである。

最後に Gauss の定理とは境界つき三次元有界領域を D とすると

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial D} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy \\
&= \int_D \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial x}dxdydz + \frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial y}dxdydz + \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z}dxdydz
\end{aligned}$$

が成り立つことです。

(1) Φ に注目すると

$$\mathbf{D}_\theta = \begin{pmatrix}\cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D}_\varphi = \begin{pmatrix}-\sin\theta\sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi & 0\end{pmatrix}$$ のため、

$$\|\mathbf{D}_\theta\| = 1\ ,\ \mathbf{D}_\theta\cdot\mathbf{D}_\varphi = 0\ ,\ \|\mathbf{D}_\varphi\| = \sin\theta$$

よって、曲面の面積は

$$\int_E \sqrt{(\|\mathbf{D}_\theta\|)^2(\|\mathbf{D}_\varphi\|)^2-(\mathbf{D}_\theta\cdot\mathbf{D}_\varphi)^2}d\theta d\varphi$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta d\varphi$$
$$= 4\pi$$

(2) 上と同様にやると $(S^2)^+$, $(S^2)^-$ ともに面積は 2π となります。

(3) $(S^2)^+\cap s^2 = (S^2)^+$ 上で考えると、$(\Psi^+)^{-1}$ は次のような形をしている。

$$\begin{array}{rccc}(\Psi^+)^{-1}: & (S^2)^+ & \to & D^2\\ & (x,y,z) & \mapsto & (r,\rho) = (\sqrt{x^2+y^2}, \arctan\frac{y}{x})\end{array}$$

よって、

$$\begin{pmatrix}r\\ \rho\end{pmatrix} = (\Psi^+)^{-1}\circ\Phi\begin{pmatrix}\theta\\ \varphi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sin\theta\\ \varphi\end{pmatrix}$$

より、曲面の向きが同じかどうかは $\frac{\partial(r,\rho)}{\partial(\theta,\varphi)}$ が正であることを調べればよい。今、$(\mathrm{S}^2)^+$上で $\cos\theta > 0$ であるので、

$$\frac{\partial(r,\rho)}{\partial(\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix}\cos\theta & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix} = \cos\theta > 0$$

よって向きは同じである。同様に $(\mathrm{S}^2)^-$上でも同じことをすると向きが同じであることが言える。

(4)

$$\frac{\partial(x(\theta,\varphi),y(\theta,\varphi))}{\partial\theta,\varphi} = \cos\theta\sin\theta$$

$$\frac{\partial(y(\theta,\varphi),z(\theta,\varphi))}{\partial\theta,\varphi} = \sin^2\theta\cos\varphi$$

$$\frac{\partial(z(\theta,\varphi),x(\theta,\varphi))}{\partial\theta,\varphi} = \sin^2\theta\sin\varphi$$

のため、問題の面積分は、

$$\int_{S^2} xdydz + ydzdx + zdxdy$$
$$= \int_E \sin\theta\cos\varphi\frac{\partial(y(\theta,\varphi),z(\theta,\varphi))}{\partial\theta,\varphi}d\theta d\varphi$$
$$+ \sin\theta\sin\varphi\frac{\partial(z(\theta,\varphi),x(\theta,\varphi))}{\partial\theta,\varphi}d\theta d\varphi$$
$$+ \cos\theta\frac{\partial(x(\theta,\varphi),y(\theta,\varphi))}{\partial\theta,\varphi}d\theta d\varphi$$
$$= \int_E\{\sin^3\theta\cos^2\varphi + \sin^3\theta\sin^2\varphi + \cos^2\theta\sin\theta\}d\theta d\varphi$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta d\varphi$$
$$= 4\pi$$

(ちなみに Ψ^+,Ψ^-のほうでもできます。)

(5) 左辺は 4πであるので右辺が 4πになることを示す。

$$\int_{D^3}\frac{\partial}{\partial x}(x)dxdydz + \frac{\partial}{\partial y}(y)dxdydz + \frac{\partial}{\partial z}(z)dxdydz$$
$$= \int_{D^3} 3dxdydz$$
$$= 3\times\frac{4}{3}\pi$$
$$= 4\pi$$

解答 9 曲線のパラメーターを長さに取りかえることをします。曲線が $(x,y) = (x(t),y(t)); t: 0\to a$ とパラメーター付けされているとき、長さは

$$s(t) = \int_0^t\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2}dt,\ \frac{ds}{dt} = \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2}$$

となります。これにより、$\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2} > 0$ のところで $s(t)$ は逆関数を持つので、これ以後、$t = t(s)$ とパラメーター t が長さ s の関数になっているとします。

接ベクトル、法ベクトル、曲率は次で与えられます。

$$\text{接ベクトル}\cdots\begin{pmatrix}\frac{dx(t(s))}{ds}\\ \frac{dy(t(s))}{ds}\end{pmatrix}$$

$$\text{接ベクトル}\cdots\begin{pmatrix}\frac{dy(t(s))}{ds}\\ -\frac{dx(t(s))}{ds}\end{pmatrix}$$

$$\text{曲率}\cdots\kappa(s_0) = \sqrt{(\frac{d^2x(t(s_0))}{ds^2})^2+(\frac{d^2y(t(s_0))}{ds^2})^2}$$

(1) 長さ s を t であらわすと、

$$s=\int_0^t\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2}dt=at,\therefore t=\frac{s}{a}$$

よって、問題の曲線は

$$\begin{pmatrix}x(s)\\y(s)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\cos\frac{s}{a}\\a\sin\frac{s}{a}\end{pmatrix}$$

これより接ベクトル、法ベクトル、曲率は

$$\text{接ベクトル}\cdots\begin{pmatrix}-\sin\frac{s}{a}\\\cos\frac{s}{a}\end{pmatrix}$$

$$\text{法ベクトル}\cdots\begin{pmatrix}\cos\frac{s}{a}\\\sin\frac{s}{a}\end{pmatrix}$$

$$\text{曲率}\cdots\kappa(s_0)=\frac{1}{a}$$

(2) 一般には (1) のように s が t の簡単な形で書けることはめったにありません。というか、$s(t)=\int_0^t\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2}dt$ が解けることなんてめったにありません。そういう時は次のようにします。

$$s(t)=\int_0^t\sqrt{1+4t^2}dt,\therefore\frac{ds}{dt}=\sqrt{1+4t^2}$$

これによって、

$$\frac{dt}{ds}=\frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}$$

これより一階の微分が計算できて

$$\frac{dx}{ds}=\frac{dt}{ds}\frac{dx}{dt}=\frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}$$

$$\frac{dy}{ds}=\frac{dt}{ds}\frac{dy}{dt}=\frac{2t}{\sqrt{1+4t^2}}$$

よって接ベクトルは

$$\frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}\begin{pmatrix}1\\2t\end{pmatrix}$$

また法ベクトルは

$$\frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}\begin{pmatrix}2t\\-1\end{pmatrix}$$

となる。(t は s の関数である)
曲率も同様にすると、

$$\frac{d^2x(t)}{ds^2}=\frac{d}{ds}(\frac{dx}{ds})=\frac{dt}{ds}\frac{d}{dt}(\frac{1}{\sqrt{1+4t^2}})=\frac{-4t}{(1+4t^2)^2}$$

$$\frac{d^2y(t)}{ds^2}=\frac{dt}{ds}\frac{d}{dt}(\frac{dy}{ds})=(\frac{1}{\sqrt{1+4t^2}})\frac{d}{dt}(\frac{2t}{\sqrt{1+4t^2}})=\frac{2-8t^2}{(1+4t^2)^2}$$

以上より曲率は t を s の関数として、

$$\kappa(s)=\sqrt{(\frac{-4t}{(1+4t^2)^2})^2+(\frac{2-8t^2}{(1+4t^2)^2})^2}=\frac{2\sqrt{1-4t^2+16t^4}}{(1+4t^2)^2}$$

(3) 上と同じようにしてください。この問題は適当に作ったのですが、計算してみるとエグイ感じになりましたので答えだけ書いておきます。

$$\text{接ベクトル}\cdots\frac{1}{\sqrt{e^{2t}+e^{-2t}}}\begin{pmatrix}-e^{-t}\\e^{t}\end{pmatrix}$$

$$\text{法ベクトル}\cdots\frac{1}{\sqrt{e^{2t}+e^{-2t}}}\begin{pmatrix}e^{t}\\e^{-t}\end{pmatrix}$$

$$\text{曲率}\cdots(e^t+e^{-t}+1)(e^t+e^{-t})^{-\frac{3}{2}}$$

あとがき

ココロコネクト見ていました。姫子が可愛いです。沢城みゆきさんの声がいいですね。ココロコネクトは tvk で土曜の 24:30〜25:00 までやっていて、MX で土曜の 25:00〜25:30 までやっているので二回見てます。一日に同じアニメを二回見るという、これぞ贅沢。姫子可愛いです。DOGDAYS を見ていました。まさかの水樹奈々さんが二役やっているとは・・・でも変身シーンをみて、なのはっぽいなって思いました。今思いますと、今期はゆるゆり二期がやっているので、数理科学 II の過去問の解答のほうに「かっすみ〜ん♪微分方程式はじまるよ〜♪」と書いておくべきでした。

さて、本題ですが今回の数理科学 I はたぶん計算ばっかりかなぁ〜って思います。なので上の問題をとけばたぶん大丈夫かなと思います。一応ノートの内容をくみ取りましたが、完全ではないのでノートで補完するべきところは補完してください。

あと、Green の定理、Gauss の定理はすべて Stokes の定理というものに集約されます。というか、この

数理科学 I の内容も多様体というものの入口ですので興味のある人は、多様体について調べてみるのもいいでしょう。僕は「多様体の基礎 (松本幸夫著)」で勉強しましたので興味のある人はぜひ読んでみてください。(最初に集合と位相の知識がいるとか書いてますが本題の議論であんまり使いません。位相については「14 日でわかる代数幾何学入門」(海老原円著) がわかりやすく教えています。)

理科 I 類 18 組 2 年
岩井雅崇