2011. 夏

１１年度前期２年理科 II, III 類 18-23 組

数理科学 II, 定期試験, １１年７月２７日　河澄響矢

解答は別紙に、計算用紙２枚。筆記用具以外持ち込み不可。

問題 1. 次の微分方程式を考える。(講義で証明した事実は証明なしに用いてよい。)

$$x^{(4)}(t) + x^{(2)}(t) + x(t) = 0$$

(1) この方程式をみたす複素数値函数 $x(t)$ 全体のなす複素ベクトル空間の基底を与えよ。
(2) この方程式をみたす実数値函数 $x(t)$ 全体のなす実ベクトル空間の基底を与えよ。

問題 2. 次の Riccati 方程式を考える:

$$(t+1)x'(t) - 2t(t+1)^2 - x(t) + 2tx(t)^2 = 0.$$

(1) この方程式をみたす一次函数 $x(t) = at + b$, a, b 定数, をすべて求めよ。
(2) この方程式の一般解を求めよ。

問題 3. $\exp(t\begin{pmatrix} -47 & 42 \\ -56 & 50 \end{pmatrix})$, $t \in \mathbb{R}$, を計算せよ。

問題 4. λ, μ を相異なる複素数とする。複素数に値をもつ未知函数 $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ についての方程式系

$$\begin{aligned} x'(t) &= \lambda x(t) + y(t) \\ y'(t) &= \lambda y(t) + z(t) \\ z'(t) &= \lambda z(t) + e^{\mu t} \end{aligned}$$

の解をすべて求めよ。

問題 5. 次の微分方程式の一般解を求め、有理函数、指数函数などを用いて表せ:

$$t(t-1)x''(t) + (1+t)x'(t) - x(t) = 0.$$

問題 6. 何回でも微分できる実数値函数 $x : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(t, u) \mapsto x(t, u)$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$, が次の関係式をみたすものとする。

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} x(t, u) = f(x(t, u)) \\ &x(0, u) = u \end{aligned}$$

このとき次を証明せよ。

(1) すべての $t, s, u \in \mathbb{R}$ について $x(t+s, u) = x(t, x(s, u))$ が成り立つ。
(2) ある t_0 について $x(t_0, u) = x(t_0, v)$ ならば $u = v$ が成り立つ。

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

問題.1

(1). $P(z)=z^4+z^2+1$ とおくと、問題 1 の微分方程式は、$P(\frac{d}{dt})x(t)=0$ となるので $P(z)$ を因数分解することを考える。

$t^2+t+1=0$ の解は

$$\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}=e^{\frac{2i\pi}{3}},e^{\frac{4i\pi}{3}}$$

なので、

$$P(z)=(z^2-e^{\frac{2i\pi}{3}})(z^2-e^{\frac{4i\pi}{3}})=(z-e^{\frac{i\pi}{3}})(z+e^{\frac{i\pi}{3}})(z-e^{\frac{2i\pi}{3}})(z+e^{\frac{2i\pi}{3}})=(z-(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}))(z+(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}))(z-(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}))(z+(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}))$$

となる。よって、問題 1 の微分方程式の基底は以下となる。

$$\{e^{(\frac{1+\sqrt{3}i}{2})t},e^{(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2})t},e^{(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2})t},e^{(\frac{1-\sqrt{3}i}{2})t}\}$$

(2). 共役のペアで以下のように新しく基底を作ります。

$$e^{(\frac{1+\sqrt{3}i}{2})t}=e^{\frac{1}{2}t}(\cos\frac{\sqrt{3}}{2})t+i\sin\frac{\sqrt{3}}{2})t)$$

$$e^{(\frac{1-\sqrt{3}i}{2})t}=e^{\frac{1}{2}t}(\cos\frac{\sqrt{3}}{2})t-i\sin\frac{\sqrt{3}}{2})t)$$

より、

$$\frac{e^{(\frac{1+\sqrt{3}i}{2})t}+e^{(\frac{1-\sqrt{3}i}{2})t}}{2}=e^{\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

$$\frac{e^{(\frac{1+\sqrt{3}i}{2})t}-e^{(\frac{1-\sqrt{3}i}{2})t}}{2i}=e^{\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

の二つが新しく基底となる。同様にもう二つの基底を作ることで以下のものが基底となる。

$$\{e^{\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t,e^{\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t,e^{\frac{-1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t,e^{\frac{-1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\}$$

問題 2.

リッカチの方程式は P,Q,R,S,x を t の関数として、

$$P\dot{x}+Q+Rx+Sx^2=0$$

の微分方程式です。そしてその特別解を x_0とすると、一般解xは$\mathrm{x}=\mathrm{y}+\mathrm{x}_0$ とあらわされ、それを元の式に代入して、整理すると、

$$P\dot{y}+(R+2x_0S)y+Sy^2=0$$

となります。これは、ベルヌーイの方程式になり、$y=w^{-1}$ とおくと、解きやすい形になります。

また、普通の一回の微分方程式

$$\dot{x}=Px+Q$$

では、$F=\int P$ とおくと、

$$\frac{d}{dt}(e^{-F}x)=-Pe^{-F}x+e^{-F}\dot{x}=-Pe^{-F}x+e^{-F}Px+e^{-F}Q=e^{-F}Q$$

$$\therefore x = e^F \int e^{-F} Q$$

で与えられます。

(1). $x = at + b(a, b$ は実数) とすると、

$$a(t+1) - 2t(t+1)^2 - (at+b)^2 + 2t(a^2t^2 + 2abt + b^2) = 0$$

となる。各自 t の係数について、恒等式を立てると

$$3 \cdots -2 + 2a^2 = 0$$

$$2 \cdots -4 + 4ab = 0,$$

$$1 \cdots a - 2 - a2b^2 = 0,$$

$$0 \cdots a - b = 0$$

$$\therefore a = b = \pm 1$$

$$\text{よって答えは } x = t+1, -t-1$$

(2). 特別解が $x_0 = t + 1$ の時。上の概略で言ったことにより、$x = y + x_0$ とすると、y についての微分方程式は

$$(t+1)\dot{y} + (-1 + 4t(t+1))y + 2ty^2 = 0$$

$$\therefore \dot{y} + (4t - \frac{1}{t+1})y + \frac{2t}{t+1}y^2 = 0$$

よって、$y = w^{-1}$ とおくと、

$$\frac{-1}{w^2}\dot{w} + (4t - \frac{1}{t+1})w^{-1} + \frac{2t}{t+1}w^{-2} = 0$$

$$\therefore \dot{w} = (4t - \frac{1}{t+1})w + \frac{2t}{t+1}$$

上の概略により $F = \int 4t - \frac{1}{t+1} = 2t^2 - \log(t+1)$ より、

$$w = e^F \int e^{-F} \frac{2t}{t+1} = e^F \int e^{-2t^2}(t+1)\frac{2t}{t+1} = \frac{e^{2t^2}}{t+1}\int 2te^{-2t^2} = \frac{e^{2t^2}}{t+1}(\frac{-1}{2}e^{-2t^2} + C) = \frac{1}{t+1}(\frac{-1}{2} + Ce^{2t^2})$$

よって、答えは

$$x = y + x_0 = w^{-1} + x_0 = (t+1) + \frac{t+1}{Ce^{2t^2} - \frac{1}{2}}$$

同様にして、$x_0 = -t - 1$ の時も同じようなことをすると解は、

$$x = -(t+1) + \frac{t+1}{Ce^{-2t^2} + \frac{1}{2}}$$

となる。

(答え)

$$x = (t+1) + \frac{t+1}{Ce^{2t^2} - \frac{1}{2}}\,,\ -(t+1) + \frac{t+1}{Ce^{-2t^2} + \frac{1}{2}}\quad (C \text{ は任意定数})$$

問題 3. 【概略】$n \times n$ 行列を A,D,P とし、

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

の形のとする。今、$A = PDP^{-1}$ なら、

$$\exp(tA) = P\exp(tD)P^{-1}$$

であり

$$\exp(tD) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

である。

問題に戻ると、$A = \begin{pmatrix} -47 & 42 \\ -56 & 50 \end{pmatrix}$ とすると、対角化することを考える。

$$\begin{vmatrix} t+47 & -42 \\ 56 & t-50 \end{vmatrix} = (t+47)(t-50) - 42 \times 56 = t^2 - 3t + 2 = (t-2)(t-1) = 0$$

よって、A の固有値は 2,1。

固有値が 2 の時は

$$\begin{pmatrix} 49 & 42 \\ 56 & -48 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{より、} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$$

固有値が 1 の時は

$$\begin{pmatrix} 48 & 42 \\ 56 & -49 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{より、} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

よって、$P = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とすると、$A = PDP^{-1}$ で、

$$P^{-1} = \frac{1}{6 \times 8 - 7 \times 7}\begin{pmatrix} 8 & -7 \\ -7 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 7 \\ 7 & -6 \end{pmatrix}$$

となるので、

$$\exp(tA) = P\exp(tD)P^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -8 & 7 \\ 7 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -48e^{2t} + 49e^t & 42e^{2t} - 42e^t \\ -56e^{2t} + 56e^t & 49e^{2t} - 48e^t \end{pmatrix}$$

問題 4.

$n \times n$ 行列を A とし、n 次縦ベクトルを v, ξ_0, A の固有値でない実数を μ とし、

$$\dot{v} = Av + e^{\mu t}\xi_0$$

という微分方程式の解は、任意に n 次縦ベクトル v_0 と取って、

$$e^{tA}v_0 + (\mu I - A)^{-1}\xi_0 e^{\mu t}$$

で与えられる。

問題の微分方程式は、

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+e^{\mu t}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

より、

$$A=\begin{pmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{pmatrix}$$

とおくと、

$$e^{tA}=e^{\lambda t}\begin{pmatrix}1&t&\frac{1}{2}t^2\\0&1&t\\0&0&1\end{pmatrix}$$

である。また、特別解は、$(\mu I-A)^{-1}$を求めると、(この逆行列を求めるのはかなりめんどくさいですが余因子展開、もしくは掃き出し法を用いて適宜数学 II のノートを参照しながら頑張ってください)

$$(\mu I-A)^{-1}=\frac{1}{(\mu-\lambda)^3}\begin{pmatrix}(\mu-\lambda)^2&-(\mu-\lambda)&1\\0&(\mu-\lambda)^2&-(\mu-\lambda)\\0&0&(\mu-\lambda)^2\end{pmatrix}$$

より、この微分方程式系の特別解は

$$(\mu I-A)^{-1}e^{\mu t}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\frac{e^{\mu t}}{(\mu-\lambda)^3}\begin{pmatrix}1\\-(\mu-\lambda)\\(\mu-\lambda)^2\end{pmatrix}$$

よって答えは、

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=e^{\lambda t}\begin{pmatrix}1&t&\frac{1}{2}t^2\\0&1&t\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}+\frac{e^{\mu t}}{(\mu-\lambda)^3}\begin{pmatrix}1\\-(\mu-\lambda)\\(\mu-\lambda)^2\end{pmatrix}(\text{ただし、}x_0,y_0,z_0\text{は任意の実数})$$

【注】

友達によると、行列で解くよりも普通に z の微分方程式から順々に解いていくほうが速いらしいです。

問題 5.

級数解をもちいます。

$$x(t)=\sum_{n=0}^{\infty}P_nt^n$$

と書けるとすると、これを微分方程式に代入して、

$$\sum_{n=2}^{\infty}(t(t-1)\frac{d^2}{dt^2}+(1+t)\frac{d}{dt}-1)(P_nt^n)+(t(t-1)\frac{d^2}{dt^2}+(1+t)\frac{d}{dt}-1)(P_1t+P_0)$$

$=\sum_{n=2}^{\infty}t(t-1)n(n-1)P_nt^{n-2}+(t+1)nP_nt^{n-1}-P_nt^n+P_1-P_0$

$=\sum_{n=2}^{\infty}t^nP_n(n^2-1)+t^{n-1}P_nn(2-n)+P_1-P_0$

よってあとは、t の n 次係数を見ていけばよい。

$$0\cdots P_1-P_0=0$$

$$1\cdots P_2\times 2\times(2-2)=0$$

$$n \geq 2 \cdots P_n(n^2-1) + P_{n+1}(n+1)(1-n) = 0$$

$n \geq 2$ のとき、

$$P_n(n^2-1) + P_{n+1}(n+1)(1-n) = (n-1)(n+1)P_n - (n-1)(n+1)P_{n+1} = (n-1)(n+1)(P_n - P_{n+1}) = 0$$

$n \geq 2$ より $(n-1)(n+1) \neq 0$ のため

$$n \geq 2 \text{ のとき } P_n = P_{n+1}$$

以上より、

$$P_0 = P_1 \ \ (P_0\text{は任意})$$

$$n \geq 2 \text{ なら、} P_n = P_2 \ \ (P_2\text{は任意})$$

よって求めるべき解は

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n t^n = P_2 \sum_{n=0}^{\infty} t^n + (P_0 - P_2)(t+1) = C_1(t+1) + C_2 \frac{1}{1-t} \ \ (C_1, C_2\text{はともに任意定数})$$

【注】

友達から聞いた別解として $x = (t+1)g$ とおくことにより、$\dot{g}$ の微分方程式になるのでこれの解をもとめ、さらに積分をすると同じ答えがでます。しかし、僕も解いてみたところ、部分積分が無双しますので、かなりしんどかったです。

問題 6.

【概略】

微分方程式の解の初期値問題を使います。どちらも t に関する微分方程式は同じなので、ある一点 t_0 で同じ値をとれば（初期値が同じだったら）その方程式 $x(t,u)$ はすべての t で一致します。

(1). すべての $s, u \in \mathbf{R}$ に対し t についての微分方程式は一致していて初期値は、$t = 0$ を入れてみると

$$x(0+s,u) = x(s,u) \ , \ x(0, x(s,u)) = x(s,u) \text{ より}$$

$$\therefore x(0+s,u) = x(0, x(s,u))$$

よって微分方程式の解の初期値問題よりすべての $t, s, u \in \mathbf{R}$ で $x(t+s,u) = x(t, x(s,u))$ となる。

(2). 上の概略より、ある一点 t_0 で同じ値をとれば, すべての t においてその方程式は一致するのでt=0でも値が一致する。よって、

$$x(0.u) = x(0, v)$$

$$\therefore u = v$$