

水曜 2 限

数理科学 II レポート

6 月 20 提出

$0 \leq \lambda \leq \mu \leq \nu$ の実数に対して、

$$(\#) \cdots \left(\left(\frac{d}{dt} \right)^2 + \lambda^2 \right) \left(\left(\frac{d}{dt} \right)^2 + \mu^2 \right) \left(\left(\frac{d}{dt} \right)^2 + \nu^2 \right) x(t) = 0$$

の微分方程式を考える。

以下 3 つの場合について \mathbf{R} 上のベクトル空間

$$V = \{x(t) | x : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \text{ かつ } (\#) \text{ の解} \}$$

の \mathbf{R} 上の基底を一組ずつ求めよ。

1. $0 < \lambda < \mu < \nu$
2. $0 < \lambda < \mu = \nu$
3. $0 < \lambda = \mu = \nu$

解答

以下、まず \mathbf{C} 上で考えてからそれから \mathbf{R} へ持ってくる。

1.

$$p(z) = (z + i\lambda)(z - i\lambda)(z + i\mu)(z - i\mu)(z + i\nu)(z - i\nu)$$

とおくと、

$$p\left(\frac{d}{dt}\right)x(t) = 0$$

となる。以上より、 \mathbf{C} 上のベクトル空間

$$V = \{x(t) | x : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C} \text{ かつ } (\#) \text{ の解} \}$$

の基底の組は、

$$\{e^{i\lambda t}, e^{-i\lambda t}, e^{i\mu t}, e^{-i\mu t}, e^{i\nu t}, e^{-i\nu t}\}$$

となる。

さて、 $e^{i\lambda t}$ と $e^{-i\lambda t}$ は共役の関係であるから、この二つから新しく実数の基底を以下のように作る。

$$\frac{e^{i\lambda t} + e^{-i\lambda t}}{2} = \cos \lambda t$$

$$\frac{e^{i\lambda t} - e^{-i\lambda t}}{2i} = \sin \lambda t$$

よって、このように新しく基底を作ると、

$$\{\cos \lambda t, \sin \lambda t, \cos \mu t, \sin \mu t, \cos \nu t, \sin \nu t\}$$

となる。これら 6 つは一次独立で V の次元は 6 よりこれらは基底となる。

$$\text{(答え)} \cdots \{\cos \lambda t, \sin \lambda t, \cos \mu t, \sin \mu t, \cos \nu t, \sin \nu t\}$$

2.

$$p(z) = (z + i\lambda)(z - i\lambda)(z + i\mu)^2(z - i\mu)^2$$

とおくと、

$$p\left(\frac{d}{dt}\right)x(t) = 0$$

となる。以上より、 \mathbb{C} 上のベクトル空間 V の基底の組は、

$$\{e^{i\lambda t}, e^{-i\lambda t}, e^{i\mu t}, e^{-i\mu t}, te^{i\mu t}, te^{-i\mu t}\}$$

となる。

先ほどと同じように新しく基底を作ると、

$$\{\cos \lambda t, \sin \lambda t, \cos \mu t, \sin \mu t, t \cos \mu t, t \sin \mu t\}$$

となる。これら 6 つは一次独立で V の次元は 6 よりこれらは基底となる。

$$\text{(答え)} \cdots \{\cos \lambda t, \sin \lambda t, \cos \mu t, \sin \mu t, t \cos \mu t, t \sin \mu t\}$$

3.

$$p(z) = (z + i\lambda)^3(z - i\lambda)^3$$

とおくと、

$$p\left(\frac{d}{dt}\right)x(t) = 0$$

となる。以上より、 \mathbb{C} 上のベクトル空間 V の基底の組は、

$$\{e^{i\lambda t}, e^{-i\lambda t}, te^{i\lambda t}, te^{-i\lambda t}, t^2 e^{i\lambda t}, t^2 e^{-i\lambda t}\}$$

となる。

先ほどと同じように新しく基底を作ると、

$$\{\cos \lambda t, \sin \lambda t, t \cos \lambda t, t \sin \lambda t, t^2 \cos \lambda t, t^2 \sin \lambda t\}$$

となる。これら 6 つは一次独立で V の次元は 6 よりこれらは基底となる。

$$\text{(答え)} \cdots \{\cos \lambda t, \sin \lambda t, t \cos \lambda t, t \sin \lambda t, t^2 \cos \lambda t, t^2 \sin \lambda t\}$$