解答

練習問題 1

＜正規分布の母平均推定に必要な標本の大きさ>

$X \sim N(\mu, 36)$を基準化すると、

$$\frac{\overline{\mathrm{X}} - \mu}{\sqrt{\frac{36}{n}}} \sim N(0.1)$$

より

$$\mathrm{P}\left(-\mathrm{z}_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\overline{\mathrm{X}} - \mu}{\sqrt{\frac{36}{n}}} \leq \mathrm{z}_{\frac{\alpha}{2}}\right) = P\left(-\mathrm{z}_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{36}{n}} \leq \overline{\mathrm{X}} - \mu \leq \mathrm{z}_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{36}{n}}\right)$$

$$= P\left(\left|\overline{\mathrm{X}} - \mu\right| \leq \mathrm{z}_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{36}{n}}\right)$$

$\mathrm{z}_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$であり、また

$$\mathrm{z}_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{36}{n}} = 3$$

が条件なので変形して

$$\mathrm{n} = 15.3 \cdots = \underline{16}$$

同様に、後半は

$$\mathrm{z}_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{36}{n}} = 1.5$$

を変形して

$$\mathrm{n} = 61.4 \cdots = \underline{62}$$

練習問題 2

＜区間推定σ²が既知＞

信頼係数が 99%(α＝0.01)なので　$\mathrm{z}_{\frac{\alpha}{2}} = 2.58$　である。

$$\mathrm{P}\left(-\mathrm{z}_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\overline{\mathrm{X}} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \leq \mathrm{z}_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

P のかっこの中をμに関して整理すると

$$\mathrm{\bar{X}} - \mathrm{z}_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \leq \mu \leq \mathrm{\bar{X}} + \mathrm{z}_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$$

これを区間表示で示すと

$$\left[\mathrm{\bar{X}} \pm \mathrm{z}_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right]$$

となるので与えられた値を代入すると

$$[57 \pm 4.515]$$

(有効数字不明)。

練習問題 3

　信頼区間の幅を

$$2 \times \mathrm{z}_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$$

とすると条件は（ちょうど 3 分の 1 になる時を考えて）,標本数を n'とすると

$$2 \times \mathrm{z}_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = 3 \times \left(2 \times \mathrm{z}_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n'}}\right)$$

$$\mathrm{n}' = 9\mathrm{n}$$

となり、標本を 9 倍すればよいことが分かった。よって

$$16 \times 9 = 144$$

とすればよい。

練習問題 4

＜信頼区間の幅＞

問題文「平均μ、分散σ^2がともに未知である正規分布に従う」とあるので、不偏標本分散を用いた t 分布を利用。不偏標本分散を s^2 として、σ^2をおきかえた

$$\mathrm{t} = \frac{\mathrm{\bar{X}} - \mu}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}}$$

を考える。ただし

$$\mathrm{s}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})$$

で表される。さて t は自由度 n-1 の t 分布に従う（正規分布表ではない）。するとこのときの信頼区間は

$$\left[\overline{\mathrm{X}} \pm \mathrm{t}_{\frac{\alpha}{2}}(\mathrm{n}-1)\sqrt{\frac{s^2}{n}}\right] \qquad (\#)$$

となる。(式変形は正規分布の奴と同じ)。
本問において

$$\overline{\mathrm{X}} = 258$$

$$\mathrm{s}^2 = \frac{1}{5-1} \cdot \{(259-258)^2 + \cdots + (262-258)^2\} = 7.5$$

（試験の際は上式は省略せずに書いたほうが部分点がもらえる確率が高いかと…）

$$\text{自由度} = 5-1 = 4$$

また

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{1-0.9}{2} = 0.05$$

より t 分布表から、

$$\mathrm{t}_{\frac{\alpha}{2}}(\mathrm{n}-1) = \mathrm{t}_{0.05}(4) = 2.132$$

以上の値を(#)代入して、求める信頼区間は

$$[258 \pm 2.61]$$

練習問題 5

＜2 項分布の正規近似における母比率の推定＞
問題文から、不良かそうでないかの 2 項分布を利用することがわかる。
2 項分布の正規近似は（本問では不良率：p として）、n が大きいとして

$$\frac{\overline{X}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \sim N(0,1)$$

とみなしてよい。 つまり$\frac{\overline{\mathrm{X}}-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}$の代わりに$\frac{\overline{X}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$を利用する。すると信頼区間は

$$\left[\overline{\mathrm{X}} \pm \mathrm{z}_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$$

ここで$\mathrm{p} \to \overline{\mathrm{X}}$とした

$$\left[\overline{X} \pm z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\overline{X}(1-\overline{X})}{n}}\right] \qquad (\%)$$

が二項分布の正規近似における p の区間近似である。

本問において

$$n = 500$$

$$\overline{X} = 45 \div 500 = 0.09$$

$$z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$$

を(%)に代入して

$$[0.09 \pm 0.025]$$

練習問題 6

この問題も、ある番組を見た or 見ていない、の二項問題である。

$$n = 1000$$

$$\overline{X} = 175 \div 1000 = 0.175$$

(1)

$$1 - \alpha = 0.95 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$$

練習問題 5 で確認した

$$\left[\overline{X} \pm z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\overline{X}(1-\overline{X})}{n}}\right] \qquad (\%)$$

に値を代入して、

$$\left[0.175 \pm 1.96\sqrt{\frac{0.175(1-0.175)}{1000}}\right] = [0.175 \pm 0.0236]$$

より有効数字 3 ケタで表すと

$$[0.175 \pm 0.024] = [0.151, 0.199]$$

(2)

今回は

$$1 - \alpha = 0.99 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.58$$

同様に(%)に代入すると

$$\left[0.175 \pm 2.58\sqrt{\frac{0.175(1-0.175)}{1000}}\right] = [0.175 \pm 0.0310]$$

有効数字 3 ケタで

$$[0.175 \pm 0.031]$$

(3)p に関する比例関係を用いて求める。確率 p での人数を$\mathrm{N}_{\mathrm{p=}}$ で表すと、

$$\mathrm{N}_{\mathrm{p=0.175}} = 250(\text{万})$$

より(1)の結果から

$$\mathrm{N}_{\mathrm{p=\,0.151}} = 250 \times \frac{0.151}{0.175}(\text{万}) = 215.7(\text{万})$$

$$\mathrm{N}_{\mathrm{p=\,0.199}} = 250(\text{万}) \times \frac{0.199}{0.175} = 284.3(\text{万})$$

以上より

$$[216{,}284](\text{万})$$

練習問題 7.

（1）

$$1 - \alpha = 0.95$$

より

$$z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$$

推定誤差を e として

$$\mathrm{e} = z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leftrightarrow \mathrm{n} = \frac{{z_{\frac{\alpha}{2}}}^2}{e^2}p(1-p)$$

に条件を代入して

$$\mathrm{n} = \frac{1.96^2}{0.02^2}0.1 \cdot 0.9 = 864.36$$

小数点以下切り上げで

$$\mathrm{n} = 865$$

ここで p=0.2 で推定すると

$$\mathrm{P}\left(|\bar{X} - 0.2| \le 1.96 * \sqrt{\frac{0.2(1-0.8)}{865}}\right) = \mathrm{P}\left(|\bar{X} - 0.2| \le 0.0266\right)$$

より見込むべき推定誤差の絶対値は 0.027（有効数字は不明）

(2)

$$\mathrm{P}(|\bar{X}-0.2|\leq 0.02)=P\left(\frac{|\bar{X}-0.2|}{\sqrt{\frac{0.2(1-0.2)}{865}}}\leq\frac{0.02}{\sqrt{\frac{0.2(1-0.2)}{865}}}\right)$$

$$=P\left(\frac{|\bar{X}-0.2|}{\sqrt{\frac{0.2(1-0.2)}{865}}}\leq 1.470\cdots\right)=P\left(|Z|\leq 1.470\cdots\right)$$

正規分布表で 1.47 に対応する値は 0.929 より

P=2(0.929-0.5) =0.858

より推定誤差 0.02 以下に対応する確率は 0.858。

練習問題 8.

(1)　この検定は右片側検定で有意水準を$\alpha=0.01$として棄却域を考えると

$$\mu_0+z_\alpha\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}=6+2.33\sqrt{\frac{40}{10}}=6+4.66=10.66$$

となるので

$$\overline{\mathrm{X}}>10.66$$

が H_0 の棄却領域となる。求めるべきは第 2 種の誤り（H_0 は正しくないに、棄却しないこと）を犯す確率なので、

$$\overline{\mathrm{X}}\leq 10.66$$

となる確率を考えたい。

母集団分布が N(10,40)　である時のグラフを考え、

$$\mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{X}}\leq 10.66\right)=P\left(\frac{\overline{X}-10}{\sqrt{\frac{40}{10}}}\leq\frac{(10.66-10)}{\sqrt{\frac{40}{10}}}\right)=P(Z\leq 0.33)\quad(\#)$$

正規分布表より

$$(\#)=0.629$$

より求める確率は <u>0.629</u>.

(2) N(10,40) において

検出力＝1 －（第 2 種の誤りを犯す確率）

より

$$1-0.629=0.371$$

よって求める検出力は <u>0.371</u>

練習問題 9.

問題文より

$$\overline{\mathrm{X}}=265, s^2=7.5, 自由度=4$$

・仮説

$$\mathrm{H}_0: \mu=265\ H_1 \neq 265$$

・検定量

$$\mathrm{t}=\frac{\overline{\mathrm{X}}-\mu}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}}=\frac{(258-265)}{\sqrt{\frac{7.5}{5}}} \cong -5.723$$

・棄却域

本問は仮説の設定上両側検定である。

ｔ分布用より

$$\mathrm{t}_{0.025}(4)=2.776$$

から

$$|\mathrm{t}|>2.26$$

が棄却域。

・結果

H_0を棄却する。すなわち内容平均量が表示より異なる（可能性が高い)。

練習問題 10.

＜本問は比率に関する検定である＞

・仮説

購入者における 10 代の割合を p として

$$\mathrm{H}_0: p=0.6\ H_1: p<0.6$$

・検定量

与えられた条件より

$$\mathrm{n}=100\ \ \overline{\mathrm{X}}=\frac{52}{100}=0.52$$

.

・検定量

本問は比率に関する検定であるためまず、基準化を行う：

$$\frac{(\overline{\mathrm{X}}-p)}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$$

に値を代入したものが正規分布 N(0,1)に従う：

$$\frac{0.52-0.6}{\sqrt{\frac{0.6\times 0.4}{100}}}=-1.633$$

・棄却域

有意水準 5%で左片側検定を行うので

$$\mathrm{Z}<\mathrm{Z}_{0.05}=-1.96$$

が棄却域。

・結論

H_0を棄却しない。すなわち 10 代の割合は低下していないと考えられる。

練習問題 11.

範囲外です

練習問題 12.

	男	女
標本数	$\mathrm{m}=40$	$\mathrm{n}=30$
標本平均	$\overline{X}=57$	$\overline{\mathrm{Y}}=49$
不偏標本分散	$s_1^2=121$	$s_2^2=81$

(1)

なんやかんやで母分散は等しい。

(2)

・仮説

H_0:男女の得点の母平均は等しい。

H_1:男性の得点の母平均は、女性のそれより高い。

・検定量 t の計算

今母分散が等しいという前提で、プールされた分散s^2を求めると

$$\mathrm{s}^2=\frac{1}{m+\mathrm{n}-2}\{(m-1)s_1^2+(n-1)s_2^2\}$$

に表中の値を代入し

$$\mathrm{s}^2=\frac{\{(40-1)\times 121+(30-1)\times 81\}}{40+30-2}=103.9411\cong 103.941$$

より検定量 t を求める公式

$$\mathrm{t}=\frac{\overline{\mathrm{X}}-\overline{Y}}{\sqrt{s^2\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)}}$$

に代入し、

$$\mathrm{t}=\frac{57-49}{\sqrt{103.941\left(\frac{1}{40}+\frac{1}{30}\right)}}=3.2489\ldots\ \cong 3.249$$

・棄却域

本問は右片側検定の問題なので、t 分布表から$\mathrm{t}_{0.05}(40+30-2)=t_{0.05}(68)\cong t_{0.05}(60)$を参照すると（t 分布表から直接$t_{0.05}(68)$を求められないので、条件に合うように近似的に$t_{0.05}(60)$の値を用いる）、

$$t_{0.05}(60)=1.671$$

より$\mathrm{t}>1.671$が棄却域。

・結論

H_0を棄却する。すなわち、男性のほうが女性よりマルペケ気質が強いといえる。

練習問題 13.

＜本問は適合度に関する問題である＞

問題文に、級（曜日）と度数（停止回数）が与えられていることから、適合度検定であると判断する。

（分かりやすくするため）理論度数を加えた表を下に書く：曜日に関係ないという仮説を立てたいので、各曜日の理論度数が均等であるとして、

曜日	月	火	水	木	金	合計
観測度数	29	14	15	24	18	100
理論度数	20	20	20	20	20	100

となる。

・仮説

H_0: *停止回数と曜日は関係ない。*

H_1: *停止回数と曜日は関係ある。*

・検定量

適合度検定では χ^2 分布を利用するので、χ^2 の値を

$$X^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(a_i - b_i)^2}{b_i} \qquad \begin{cases} a: 観測度数 \\ b: 理論度数 \end{cases}$$

に表中の値を代入して求めると。

$$X^2 = \frac{(29-20)^2}{20} + \frac{(14-20)^2}{20} + \frac{(15-20)^2}{20} + \frac{(24-20)^2}{20} + \frac{(18-20)^2}{20} = 8.1 \quad \cdots ①$$

（部分点確保のため①式は省略せずに書きましょう！！）

・棄却域

自由度が$5-1=4$よりX^2は分布表より

$$X^2_{0.05}(4) = 9.49$$

となり棄却域は

$$X^2 > 9.49 \quad \cdots (\#)$$

となる。((＃）より観測値と理論値がずれていたら帰無仮説が弱いって感じです)

・結論

① は（＃）に含まれないので H_0 は正しい。すなわち曜日とは関係ないと考えられる。

練習問題 14 の追加問題.

＜独立性の検定＞

問題文に「～は独立であるか」とは直接書いてないが、分割表と各カテゴリの関係を問うているので適合度検定における独立性の検定（分割表の検定）をしましょう。

・仮説

$$H_0: 好感度と年齢層は独立$$
$$H_1 好感度と年齢層は独立でない$$

・検定量

理論度数の表を作りましょう：

年齢層｜好感度	良い	悪い	どちらでもない	計
20～30 代	46	21	13	80
40～50 代	41	18	11	70
60 代以上	29	13	8	50
計	116	52	32	200

例えば（20～30 代、良い）のセルの 46 の求め方は、問題の表を参照して

$$80 \times \frac{116}{200} \cong 46$$

(20～30 代の内訳を高感度における「良い」の確率と一致すると仮定して計算する)

適合度検定ではχ²分布を利用するので、χ²の値を**練習問題 13** の公式に各値を代入して

$$\chi^2 = \frac{(60-46)^2}{46} + \frac{(10-21)^2}{21} + \frac{(10-13)^2}{13} + \frac{(34-41)^2}{41} + \frac{(22-18)^2}{18} + \frac{(14-11)^2}{11}$$
$$+ \frac{(22-29)^2}{29} + \frac{(20-13)^2}{13} + \frac{(8-8)^2}{8} = 19.079 \quad \cdots ①$$

(部分点確保のため省略せずに立式しましょう

・棄却域

自由度の決定について、分割表の問題における自由度は、本問においては年齢層、好感度というカテゴリのパラメータの数が 3 個（よい、悪い、どちらでもない)、3 個（20～30 代、40～50 代、60 代以上)なので、

$$\text{自由度} = (3-1)(3-1) = 4$$

となる。χ²分布表より

$$\chi^2_{0.01}(4) = 13.24$$

が分かり、

$$\chi^2 > 13.24 \qquad \cdots (\&)$$

が棄却域となる。

・結論

① が(&)の範囲に入るので、H_0 は棄却。すなわち、好感度と年齢層ごとに差があるとは言えない。