数学 II 期末試験問題 解答のヒント　Written by ななしたん

2008 年 9 月 3 日 (水) 2 限　担当：加藤晃史

$\boxed{1}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -3 & -3 & -1 & -11 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 1 & -1 & -5 \\ -2 & 1 & 4 & 4 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{1 列目のお掃除}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -3 & -3 & -1 & -11 \\ 0 & 2 & 4 & 5 & 1 & 14 \\ 0 & 4 & 8 & 10 & 2 & 28 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -5 & -22 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{2 列目のお掃除}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 4 & 11 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 5 & 22 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -9 & -30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{4 列目のお掃除}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & -5 & -19 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 23 & 82 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -9 & -30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ -23 \\ 0 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -19 \\ 82 \\ 0 \\ -30 \\ 0 \end{pmatrix}$$

階数 (rank) は 3

$\boxed{2}$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 2 & 3 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{行変形のみを繰り返す}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7 & 4 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -2 & -2 & 3 \end{array}\right)$$

$$\therefore \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ -7 & 4 & 4 & -5 \\ 4 & -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

※行列を縦に並べて、列変形のみを用いることによって逆行列を求めてもよい。

$\boxed{3}$

定義

$K(\mathbb{R}, \mathbb{C}$ など) 上の線形空間 V の部分集合 W が、同じ演算に関して K 上の線形空間になるとき、W を V の線形部分空間あるいは単に部分空間と言う。
V の空でない部分集合 W が V の部分空間であるためには、つぎの二条件件が充されることが必要かつ十分である。

$$1)\ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W \Rightarrow \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in W$$
$$2)\ \boldsymbol{x} \in W, a \in K \Rightarrow a\boldsymbol{x} \in W$$

....

線形部分空間であるもの

$$S_1 = \{f \in V | f(1) = 0\}$$
$$S_3 = \{f \in V | f(-x) = -f(x)\}$$
$$S_4 = \{f \in V | \int_0^1 f(t)dt = 0\}$$
$$S_6 = \{f \in V | f = (x-1)^3 \cdot g \text{ となる } g \in V \text{ が存在する }\}$$

線形部分空間ではないもの

$$S_2 = \{f \in V | f(0) = 1\}$$
$$S_5 = \{f \in V | f \text{ は } x \text{ の 2 次式 }\}$$
$$S_7 = \{f \in V | f \cdot g = (x-1)^3 \text{となる } g \in V \text{ が存在する }\}$$
$$S_8 = \{f \in V | f'(a) = 0 \text{ となる実数 } a \text{ が存在する }\}$$

S_2 に関する例

$$f_1(x) = x^7 + 1 \in S_2$$
$$f_2(x) = x^{77} + 1 \in S_2$$
$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) = x^{77} + x^7 + 2 \notin S_2$$

S_5 に関する例

$$f_1(x) = x^2 + 7 \in S_5$$
$$f_2(x) = -x^2 \in S_5$$
$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) = 7 \notin S_5$$

S_7 に関する例

$$f_1(x) = x - 1 \in S_7$$
$$f_2(x) = (x-1)^2 \in S_7$$
$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) = x(x-1) \notin S_7$$

S_8 に関する例

$$f_1(x) = x^2 + 7x \in S_8$$
$$f_2(x) = -x^2 \in S_8$$
$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) = 7x \notin S_8$$

$\boxed{4}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{pmatrix}$$

(x, y, z) がただ一つの解をもつ条件を求める。

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 1 & -1 & d_2 \\ 1 & -1 & 1 & d_3 \\ -1 & 1 & 1 & d_4 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{行変形を繰り返す}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & d_2 + d_3 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 - d_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 - d_2 - d_3 \\ 0 & 0 & 2 & d_3 + d_4 \end{array}\right)$$

3 行目と 4 行目が同値であることが求める条件。

$$2(d_1 - d_2 - d_3) = d_3 + d_4$$
$$\therefore 2d_1 - 2d_2 - 3d_3 - d_4 = 0$$

このとき、4 枚の平面は $(x, y, z) = (d_2 + d_3, d_1 - d_3, d_1 - d_2 - d_3)$ のただ 1 点で交わる。

$\boxed{5}$

主張は正しい。

A が正則行列 ($\mathrm{rank}A = n$) のとき、$B = A^{-1}$ と定めれば、$AB = BA = I$ が成立する。
A が正則行列ではない ($\mathrm{rank}A < n$) とき、正則行列 P によって、

$$PA = \left(\begin{array}{c} I'_{r,n} \\ \hline O_{n-r,n} \end{array}\right)$$

と変形することができる。
ここで、$\left(\begin{array}{c} I'_{r,n} \\ \hline O_{n-r,n} \end{array}\right)$ は列に関して並べ替えを行えば $\left(\begin{array}{c|c} I_{r,r} & O_{r,n-r} \\ \hline O_{n-r,r} & O_{n-r,n-r} \end{array}\right)$ となるような行列である。
同様に、正則行列 Q によって、

$$AQ = \left(\begin{array}{c|c} I'_{n,r} & O_{n,n-r} \end{array}\right)$$

と変形することができる。
$B' = \left(\begin{array}{c|c} O_{r,r} & O_{r,n-r} \\ \hline O_{n-r,r} & I_{n-r,n-r} \end{array}\right)$ と定めると、$B'PA = AQB' = O$ となる。
これより、$B = QB'P$ とすれば、

$$AB = A(QB'P) = (AQB')P = OP = O$$

$$BA = (QB'P)A = Q(B'PA) = QO = O$$

$$\therefore AB = BA = O$$

このとき、$B \neq O$ であることは以下に示すように容易に確認できる。
$B = QB'P = O$ と仮定すると、P, Q は正則行列であることより、P^{-1}, Q^{-1} が存在し、これらを右、左からそれぞれ乗ずることにより、$B' = O$ となり矛盾。従って、$B \neq O$

$\boxed{6}$

$T\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x} (\alpha \in K)$ かつ $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o}$ であるような $\boldsymbol{x}$ を T の固有ベクトル、α を T の固有値という。
また、$\Phi_A(x) = \det(xE - A)$ を行列 A の特性方程式あるいは固有多項式という。

………………………………………………………………………………………………

(1) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ とすれば、$A_n\boldsymbol{x} = n\boldsymbol{x}$ である。

(2) $\Phi_{A_2}(x) = \det(xE - A_2) = x^2 - 2x$
$\Phi_{A_3}(x) = \det(xE - A_3) = x^3 - 3x^2$

(3) $\Phi_{A_n}(x) = \det(xE - A_n) = x^n - nx^{n-1}$ と推測できる。
n に関する数学的帰納法により、この推測が正しいことを示す (1 列目に関する余因子展開と列の交換を行う)。
$n = 1, 2, 3$ のとき、これは正しい。

$$\begin{aligned}
\Phi_{A_n}(x) &= \det(xE - A_n) \\
&= (x-1)\Phi_{A_{n-1}}(x) + (n-1)\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & & & & \\ -1 & x-1 & -1 & & & & \\ -1 & -1 & x-1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & x-1 & -1 & -1 \\ & & & & -1 & x-1 & -1 \\ & & & & -1 & -1 & x-1 \end{vmatrix}_{(n-1,n-1)} \\
&= (x-1)\Phi_{A_{n-1}}(x) - (n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & & & & \\ 0 & x & 0 & & & & \\ 0 & 0 & x & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & x & 0 & 0 \\ & & & & 0 & x & 0 \\ & & & & 0 & 0 & x \end{vmatrix}_{(n-1,n-1)} \\
&= (x-1)\Phi_{A_{n-1}}(x) - (n-1)x^{n-2}
\end{aligned}$$

$n - 1$ のとき、仮定が正しいとすれば、

$$\Phi_{A_n}(x) = (x-1)\{x^{n-1} - (n-1)x^{n-2}\} - (n-1)x^{n-2} = x^n - nx^{n-1}$$

となる。よって、n のときも正しい。
以上より、$\Phi_{A_n}(x) = \det(xE - A_n) = x^n - nx^{n-1}$ が A_n の特性多項式である。

$\boxed{7}$

$$\begin{aligned} AB = A + B &\Leftrightarrow (A-I)(B-I) = I \\ &\Leftrightarrow (A-I)^{-1} = B - I \\ &\Leftrightarrow (B-I)(A-I) = I \\ &\Leftrightarrow BA = A + B \end{aligned}$$

$$\therefore AB = BA$$