2004 年度冬学期 数学 II　期末試験問題

2005 年 2 月 9 日 4 限　　　担当：加藤晃史

※試験時間 90 分．解答用紙（両面）2 枚，計算用紙 1 枚
※ノート・参考書などの持ち込み不可
※特にことわりのない限り考え方や途中経過等も解答用紙に書くこと

$\boxed{1}$　「線型空間 V が部分空間 $W_1, W_2, \ldots, W_r$ の直和である」ことの定義を述べよ．

$\boxed{2}$　変数 x の 3 次以下の複素係数多項式全体のなすベクトル空間を V とし，$V' = \mathbb{C}^3$ とする．線型写像 $T : V \to V'$ を，x の多項式 f に対し，$x = 1, x = 2, x = 3$ での f の値を並べてできる 3 項縦ベクトル

$$T(f) = \begin{pmatrix} f(1) \\ f(2) \\ f(3) \end{pmatrix} \qquad (f \in V)$$

を対応させる写像として定義する．以下の問に答えよ．

(1)V の基底 $E = \{1, x, x^2, x^3\}$ および V' の基底 $E' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ に関して T を行列表示せよ．

(2) 核空間 $\mathrm{Ker}T$ の基底と次元を求めよ．

(3) 像空間 $\mathrm{Im}T$ の基底を次元を求めよ．

(4) 表現行列ができるだけ簡単になるような V の基底 F と V' の基底 F' を選んで T を行列表示せよ．

$\boxed{3}$　複素数 a を含む次の行列を考える．

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a & 3 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

(1)A の特性多項式を求めよ．

(2)「どのような複素数 a に対しても，行列 A は対角化可能である」という主張は正しいか，誤りであるかを判定せよ．最初に結論を述べ，次にその証明を与えよ．

$\boxed{4}$　A を実対称行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 3 \\ -3 & -4 & 4 & -1 \\ 0 & 4 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

とする．以下の問いに答えよ．

(1)A のすべての固有値とその重複度を求めよ．

(2)$D = P^{-1}AP$ が対角行列となるような，実直交行列 P と対角行列 D を求めよ．

(3)$F(\boldsymbol{x}) = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ で定まる $\mathbb{R}^4$ 上の二次形式 F の符号数とその Sylvester 標準形を求めよ.（どのような座標変換が必要かは答えなくてよい.）

$\boxed{5}$　(m, n) 型行列 A, B に対して，

$$\mathrm{rank}(A+B) \leq \mathrm{rank}A + \mathrm{rank}B$$

が成り立つことを証明せよ．