2008 年度夏学期　数学 II　期末試験問題（担当：担当：加藤晃史

2008 年 9 月 3 日（水）２限

※解答する問題の順序は問わない

※試験時間 90 分

※ノート・参考書などの持ち込み不可

※特にことわりのない限り考え方や計算の途中経過等も解答用紙に書くこと

$\boxed{1}$ 次の連立一次方程式の一般解と係数行列の階数を求めよ。

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & - & x_2 & - & 3x_3 & - & 3x_4 & - & x_5 & = & -11 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & & & = & 3 \\ 3x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & - & x_5 & = & -5 \\ -2x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & + & 4x_4 & - & 3x_5 & = & 0 \end{array}\right.$$

$\boxed{2}$ 次の行列の逆行列を求めよ。

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$\boxed{3}$ 実数を係数とする x の多項式全体のなす実ベクトル空間を V をする。以下で定める V の部分集合 S_i それぞれについて、V の線型部分空間であるか否かを答えよ。**本問に限り，答だけ書けばよい。** ただし、誤半定は無回答よりも減点するので、判定できないものについては答えなくてよい。また、$\cdot$ は多項式の積（掛け算）を、f' は f の導関数（微分）を表す.

$S_1 = \{f \in V \mid f(1) = 0\}$　　$S_2 = \{f \in V \mid f$ は x の 2 次式 $\}$

$S_3 = \{f \in V \mid f(0) = 1\}$　　$S_4 = \{f \in V \mid f = (x-1)^3 \cdot g$ となる $g \in V$ が存在する $\}$

$S_5 = \{f \in V \mid f(-x) = -f(x)\}$　　$S_6 = \{f \in V \mid f \cdot g = (x-1)^3$ となる $g \in V$ が存在する $\}$

$S_7 = \{f \in V \mid \int_0^1 f(t)dt = 0\}$　　$S_8 = \{f \in V \mid f'(a) = 0$ となる実数 a が存在する $\}$

$\boxed{4}$ d_1, d_2, d_3, d_4 を実数とする。xyz 座標空間において、４枚の平面 $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$ をそれぞれ以下の１次式で定める。

$$\pi_1 : x + z = d_1 \qquad \pi_2 : y - z = d_2$$
$$\pi_3 : x - y + z = d_3 \qquad \pi_4 : -x + y + z = d_4$$

４枚の平面 $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$ が１点で交わる（集合 $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 \cap \pi_4$ がただ１つの点を含む）ための必要十分条件を d_1, d_2, d_3, d_4 を用いて表せ。

$\boxed{5}$ 次の主張が正しければ証明し、誤りであれば反例を挙げよ。『任意の $n \times n$ 行列 A に対し、零行列とは異なる $n \times n$ 行列 B をうまく選べば、$AB = BA = I$ または $AB = BA = O$ が成立する。』

$\boxed{6}$ 正の整数 n に対し、n 次正方行列 $A_n = (a_{ij})$ を $a_{ij} = 1$ で定義する。$(1 \leq i, j \leq n)$

(1)n が A_n の固有値であることを示せ。

(2)A_2, A_3 の特性多項式を求めよ。

(3)A_n の特性多項式の形を予想し、それを証明せよ。

$\boxed{7}$ n 次正方行列 A, B について、$AB = A + B$ が成り立っている。このとき $AB = BA$ であることを示せ。