

第6問

遠心力で飛んでいかないための条件式より、

$$R\Omega^2 < \frac{GM}{R^2} \Leftrightarrow \Omega^2 < \frac{GM}{R^3}$$

また、

$$\Omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

なので

$$G = 6.67 \times 10^{-8}, M = M_{\odot} = 1.99 \times 10^{33} \text{ g}, R = 5000 \text{ km} = 5 \times 10^8 \text{ cm}$$

の値より

$$T > 2\pi \sqrt{\frac{(5 \times 10^8)^3}{6.67 \times 10^{-8} \cdot 1.99 \times 10^{33}}} = 6.094 \dots$$

よってこの白色矮星は最短で 6.1s の周期で回転できる。

第7問

○ 簡単のため、人間を長さ $l=170\text{cm}$ のひもの両端に重さ 30kg のおもりを1個ずつつけたモデルを考える。

ひもにかかる張力を T 、ブラックホール中心から頭までの距離を r 、加速度を a とすると

$$\text{頭の運動: } ma = -\frac{GMm}{r^2} + T$$

$$\text{足の運動: } ma = -\frac{GMm}{r^2} - T$$

この2式から、 $l \ll r$ を考慮して

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{GMm}{r^2} - \frac{GMm}{(r+l)^2} \right) \approx \frac{GMml}{r^3}$$

人間の体が1トンの引っ張り力で引きちぎれてしまうと仮定すると、人間がブラックホールに対して近づける限界の距離 r_l は

$$r_t = \left(\frac{GMml}{T} \right)^{1/3} = \left(\frac{GM_\odot ml}{T} \right)^{1/3} \times \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{1/3}$$

$$= \left(\frac{6.67 \times 10^{-8} \cdot 1.99 \times 10^{33} \cdot 30000 \cdot 170}{1000 \cdot 1000 \cdot 980} \right)^{1/3} \times \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{1/3} = 880 \text{ km} \times \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{1/3}$$

ここでシュバルツシルト半径 r_g は

$$r_g = \frac{2GM}{c^2} = \frac{2 \cdot 6.67 \times 10^{-8} \cdot 1.99 \times 10^{33}}{(3 \times 10^{10})^2} \times \left(\frac{M}{M_\odot} \right) = 2.96 \text{ km} \times \left(\frac{M}{M_\odot} \right)$$

であるから、ブラックホールのはるか手前で人間の体は引きちぎれてしまいブラックホールに入ることはできない。

○人間が生きたままブラックホールに入っていくための条件は $r_t < r_g$

つまり

$$880 \times \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{1/3} < 2.96 \times \left(\frac{M}{M_\odot} \right) \Leftrightarrow 880^3 \times \frac{M}{M_\odot} < 2.96^3 \times \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^3$$

$$\Leftrightarrow M > \sqrt{\frac{880^3}{2.96^3}} M_\odot$$

$$\Leftrightarrow M > 5126.09 \dots \times M_\odot$$

よって求める条件は $M > 5127 M_\odot$

第8問

銀河中心の周りのケプラー回転は以下の式で表される

$$\frac{v^2}{r} = \frac{GM_r}{r^2} \Leftrightarrow M_r = \frac{rv^2}{G}$$

銀河の回転速度は銀河のずっと外までほぼ一定なので、外側に行くにつれて質量は増して行くはずである。

この質量は見える物質(星など)の質量より大きく、その差分を補填する物質があるはず。

これが見えない物質(dark matter)だと考えられる。

第9問

①ハッブル則…現在の宇宙膨張を銀河の後退速度から直接示している。

②3K宇宙背景放射…初期宇宙においては約3000Kの高温の黒体放射で満たされていた。このときから現在の宇宙は約1000倍に膨張している。ウィーンの変異則によると黒体放射には $\lambda T = \text{一定}$ の関係があるので、現在の黒体放射の温度は当時の1000分の1になっているはずである。実際、現在の黒体放射は3Kと、つじつまはあっている。このことから3K宇宙背景放射はビッグバンの高温の名残を観測していると考えられる。

③ヘリウムの存在量…宇宙に普遍的にあるヘリウムが星の核融合反応で作られるとする。太陽が100億年(宇宙年齢)で水素を燃やしてヘリウムを作るとすると、ヘリウムの割合は

$$Y = \frac{L_{\odot} \times 10^{10} \text{ yr}}{0.07 M_{\odot} c^2} = \frac{3.85 \times 10^{33} \cdot 10^{10} \times 60 \times 60 \times 24 \times 365}{0.007 \cdot 2 \times 10^{33} \cdot (3 \times 10^{10})^2} = 0.096$$

となる。

しかし現在の普遍的なヘリウム量は $Y = 0.25$ であり、宇宙初期に水素と同時に作られたと考えないと説明がつかない。中性子が陽子と反応して重水素となり、さらにヘリウムにまで合成するためには宇宙初期が高温の火の玉宇宙である必要がある。

第10問

中心星に向かってガスや塵が落下し、中心星の周りに降着円盤を形成する。ある時点で中心星へのガスの降着は終わり、比較的質量の小さい円盤が星の周りに残る。その円盤の中の塵の密度が大きくなり、塵同士が合体成長を始める。塵はガスの熱運動によってブラウン運動をしたりガスの抵抗を受けたりするが、長い時間の間に重力に引かれて赤道面に向かって沈降を始める。塵が赤道面に集まってくると塵同士の重力が無視できなくなり(ジーンズの重力不安定)、お互いの重力によって塵が集まって微惑星となる。この微惑星同士が衝突合体し、原始惑星に成長していく。この成長の仕方は寡占的成長である。こうして原始惑星の質量が大きくなっていくにつれて惑星表面の重力も大きくなり、惑星はガスを取り込んで大気を持つ。そののちに何らかのメカニズムがはたらいて原始惑星系のガスが散逸し、現在の太陽系のような惑星系が形成される。