定理 2.1

(1) f が (a,b) において微分可能 $\to$ (a,b) において偏微分可能

(2) f が (a,b) において微分可能 $\to$ (a,b) において連続

定理 2.2

$$D \subset \mathbb{R}^2, f : D \to \mathbb{R}$$

$$f \text{ が } D \text{ 上偏微分可能で、} \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \text{が連続}$$

$$\Downarrow$$

$$f \text{ は } D \text{ 上微分可能}$$

定理 2.3 (Schwarz)

$$f : D \to \mathbb{R}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \text{が存在して、} D \text{ で} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \text{が連続}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \text{も存在して、} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}$$

定理 2.4

$$f \in C^r(D) \Rightarrow f \text{ の } r \text{ 階までの偏導関数は微分の順序によらない。}$$

定理 2.5

$$T(t_1, \ldots, t_m) \in E \subset \mathbb{R}^n \qquad \Phi : E \to D$$

$$\Phi \quad \begin{cases} x_1 = x_1(t_1, \ldots, t_m) \\ \vdots \\ x_n = x_n(t_1, \ldots, t_m) \end{cases}$$

$$X(x_1, \ldots, x_n) \in D \subset \mathbb{R}^n \qquad f : D \to \mathbb{R}$$

$$f : \text{微分可能、} \Phi : \text{微分可能}$$

$$\Rightarrow F = f \circ \Phi \text{も } E \text{ 上微分可能で、}$$

$$\frac{\partial F}{\partial t_j}(T) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\Phi(T)) \, \frac{\partial x_1}{\partial t_j}(T) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\Phi(T)) \, \frac{\partial x_n}{\partial t_j}(T)$$

$$(j = 1, \ldots, m)$$

系

$$f \in C^r(D), x_1(T), \ldots, x_n(T) \in C^r(E) \Rightarrow F \in C^r(E)$$