微分可能

$$D \subset \mathbb{R}^2, D: \text{開集合}, f: D \to \mathbb{R}$$
$$A = (a, b) \in D$$

に対し、

$$f(x,y) = f(a,b) + \alpha(x-a) + \beta(y-b) + \epsilon(x,y)$$
$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{\epsilon(x,y)}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} = 0$$

となる α, β が存在するとき、f は (a,b) において微分可能という。

偏微分可能

極限

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{x\to a} \frac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \lim_{y\to b} \frac{f(a,y)-f(a,b)}{y-b}$$

が存在するとき、f は偏微分可能という。

偏導関数

f が D の各点 (x,y) において、（偏）微分可能であるとき、f は D 上（偏）微分可能という。

f が D 上偏微分可能であるとき、(x,y) に対し、$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ を対応させる関数

$$\frac{\partial f}{\partial x} : D \to \mathbb{R}$$

を (x に関する) 偏導関数という。

C^1 級

D 上 f が偏微分可能で、$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ が連続であるとき、f は D 上 C^1 級であるという。

接平面

$$D \subset \mathbb{R}^2, f: D \to \mathbb{R}, \text{微分可能}, (a,b) \in \mathbb{R}$$

のとき、

$$z - f(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$$

で表される平面を、$(a,b,f(a,b))$ における曲面 $z = f(x,y)$ の接平面という。

微分

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dy$$

を f の微分という。
df は x, y, dx, dy の 4 変数関数。

n 変数関数の微分

$$D \subset \mathbb{R}^n, D: \text{開集合}, f: D \to \mathbb{R}$$
$$A = (a_1, \ldots, a_n), X = (x_1, \ldots, x_n) \in D$$
$$f(X) = f(A) + \alpha_1(x_1 - a_1) + \cdots + \alpha_n(x_n - a_n) + \epsilon(X)$$
$$\lim_{X\to A} \frac{\epsilon(X)}{|X-A|} = 0$$

となる $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ が存在するとき、f は A において微分可能であるという。

f が D 上微分可能ならば、偏導関数

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

が存在し（偏微分可能であり）

$$\alpha_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}(A), \ldots, \alpha_n = \frac{\partial f}{\partial x_n}(A)$$

$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ が連続であるとき、f は C^1 級という。

高級偏導関数

$D \subset \mathbb{R}^n, f : D \to \mathbb{R}$ が D 上偏微分可能なら $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ が存在する。更に $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ が偏微分可能なら、

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x}),\ \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x}),\ \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y}),\ \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y})$$

の 4 つの関数が存在する。これらを f の 2 階偏導関数といい、

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

と書く。

n 変数の r 階偏導関数について

$$D \subset \mathbb{R}^n, f(x_1, \ldots, x_n) : D \to \mathbb{R}$$

の r 階までの偏導関数がすべて存在し、連続であるとき、f は D 上 C^r 級であるといい、$f \subset C^r(D)$ と書く。