命題 1.1

$$\alpha = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} \forall a \in A \text{ に対し、} a \leq \alpha \\ \text{かつ} \\ \forall \epsilon > 0 \text{ に対し、} \alpha - \epsilon < a \\ \qquad \text{となる } a \in A \text{ がある。} \end{cases}$$

($\inf A$ でも同様)

定理 1.2（実数の連続性）
$\emptyset \in A \subset \mathbb{R}$　のとき、
A が上に有界 $\Rightarrow \sup A$ は存在する。
A が下に有界 $\Rightarrow \inf A$ は存在する。

補足
$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束する $\Rightarrow |a_n| \leq \exists M$

定理 1.3
上に有界な単調増加数列は収束する。

定理 1.4
$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が有界数列 $\Rightarrow \limsup_{n\to\infty} a_n$、$\liminf_{n\to\infty} a_n$
が存在する。

命題 1.5
数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束
$\Leftrightarrow \limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n$

定理 1.6（Cauchy の判定法）
$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束するためには、

$$\begin{cases} \forall \epsilon > 0 \text{ に対し、} n\text{、}m > N \Rightarrow |a_n - a_m| < \epsilon \\ \text{となるNが存在する。} \end{cases}$$

が、必要十分条件である。
これを満たす数列を Cauchy 列という。

定理 1.7（Bolzano-Weierstrass の定理）
$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が有界数列
$\Rightarrow \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束する部分列 $a_{i_n}{}_{n=1}^{\infty}$ をもつ。

命題 1.8

1. D が開集合 $\Leftrightarrow A \in D$ に対し、$U_\delta(A) \subset D$ となる $\delta > 0$ が存在する。
2. D が閉集合 $\Leftrightarrow$ $A_k \in D$ を満たす点列 $\{A_k\}_{k=1}^{\infty} \to A \Rightarrow A \in D$
3. D が開集合 $\Leftrightarrow D^c$ が閉集合
（D が閉集合 $\Leftrightarrow D^c$ が開集合）

定理 1.9（Bolzano-Weierstrass）
$D \subset \mathbb{R}^n$、D : 有界閉集合、$\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ が D 上の点列
$\Rightarrow A_k$ は、D の要素に収束する部分列を持つ

定理 1.10（Weierstrass）
$D \subset \mathbb{R}^n$、D:有界閉集合、$f : D \to \mathbb{R}$
$\Rightarrow f$ は D において最大値、最小値をもつ。

定理 1.11（平均値の定理）
$f : [a, b]$ で連続、(a, b) で微分可能
$\Rightarrow f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$ となる $\xi \in (a, b)$
が存在する。

（$\xi = a + \theta(x - a)$ と表して、
$f(x) - f(a) = f'(a + \theta(x - a))(x - a)$ $(0 < \theta < 1)$
の形で用いることが多い。）

定理 1.12（Cauchy の平均値の定理）
$f, g : [a, b]$ で連続、(a, b) で微分可能
$\Rightarrow (f(b) - f(a))g'(\xi) = (g(b) - g(a))f'(\xi)$
となる $\xi \in (a, b)$ が存在する。