最大値、最小値

$A \subset \mathbb{R}$ とする。
β が

1. $\forall a \in A$ に対し $a \leq \beta$
2. $\beta \in A$

を満たすとき、 β は A の最大値といい、
$\beta = \max A$ と書く。

同様にして、$\min A$ も定義される。

上限、下限

$\forall a \in A$ に対し、$a \leq M$ なる M があるとき、
集合 A は上に上界といい、M を A の上界という。

上界の集合： U_A = {M $|\forall a \in A$ に対し $a \leq M\}$

$\min U_A$ を A の上限といい、$\sup A$ と書く。

下限も同様 ($\inf A$)。

数列

数列（無限実数列）を $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ で表す。

数列の収束

$\forall \epsilon > 0$ に対し、

$$n > N \Rightarrow |a_n - a| < \epsilon$$

となる自然数 N が存在するとき、 a_n は収束するといい、

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

と書く。

補足 （数列の発散）

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束しないとき、
（どんな a をもってきても $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$
とならないとき）
a_n は発散するという。

上極限、下極限

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対し、

1. $\forall \epsilon > 0$ に対し、 $\lambda + \epsilon \leq a_n$ なる n は高々有限個。
2. $\forall \epsilon > 0$ に対し、 $\lambda - \epsilon \leq a_n$ なる n は無限個。

の 2 条件をみたす λ を上極限といい

$$\lambda = \limsup_{n\to\infty} a_n$$

と書く。

下極限も同様 ($\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$)。

部分列

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対し、項の一部を選び出した数列

$$a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_n}, \cdots$$

を $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列という。
ただし、$i_1 < i_2 < \cdots < i_n < \cdots$

$\mathbb{R}^n$ 上での距離、有界、無限列

$X, Y \in \mathbb{R}^n$ に対し、

$$|X - Y| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

で、$\mathbb{R}^n$ の距離を定義する。
$(X = \{x_1, \ldots, x_n\}$、$Y = \{y_1, \ldots, y_n\})$

$D \subset \mathbb{R}^n$ は、$X \in D$ において
$|X| \leq \exists M$ なるとき、有界であるという。

$\mathbb{R}^n$ の無限列を点列といい、$\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ と書く。

点列の収束

$\lim\limits_{k\to\infty} |A_k - A| = 0$ となるとき、
点列 $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ は A に収束するといい、

$$\lim_{k\to\infty} A_k = A$$

と書く。

δ 近傍

$A \in \mathbb{R}^n$、$\delta > 0$ に対し、

$$U_\delta(A) = \{X \in \mathbb{R}^n \mid |x - A| < \delta\}$$

を δ 近傍という。

境界

$D \subset \mathbb{R}^n$、$\forall\delta > 0$ に対し、

$$\begin{cases} U_\delta(A) \cap D \neq \emptyset \\ \text{かつ} \\ U_\delta(A) \cap D^c \neq \emptyset \end{cases}$$

となるとき、A を D の境界点という。
境界点の全体を D の境界といい、∂D と書く。
もちろん、$\partial D = \partial D^c$

開集合、閉集合

$\partial D \cap D = \emptyset$ のとき、D は開集合という。
$\partial D \subset D$ のとき、D は閉集合という。

関数

$D \in \mathbb{R}^n$ とする。D の各点に $\mathbb{R}$ の値が対応する規則 f を

$$f : D \to \mathbb{R}$$

と書き、n 変数関数という。

連続関数（$\epsilon - \delta$ 論法）

$D \subset \mathbb{R}^n$、$f : D \to \mathbb{R}$、$A \in D$
とするとき、$\forall\epsilon > 0$ に対し、

$$|X - A| < \delta、X \in D \Rightarrow |f(X) - f(A)| < \epsilon$$

となる $\delta > 0$ が存在するとき、f は A において連続という。

$\forall A \in D$ において、f が連続であるとき、f は D 上の連続関数であるという。

関数の極限

$D \subset \mathbb{R}^n$、$f : D \to \mathbb{R}$、$\forall\epsilon > 0$ に対し、

$$0 < |X - A| < \epsilon、X \in D$$
$$\Rightarrow |f(X) - f(A)| < \epsilon$$

なる $\epsilon > 0$ が取れるとき、$X \to A$ のとき f は収束するといい、

$$\lim_{X \to A} f(X) = \alpha$$

と書く。α を f の $X \to A$ のときの極限という。

A は D の要素でなくても良いが、その場合には、

$$\forall\delta > 0 \text{ に対し、} 0 < |X - A| < \delta、X \in D$$

なる X が存在するような点でなければならない。

微分可能

$a \in D$、$D \subset \mathbb{R}$、$f : D \to \mathbb{R}$ に対し、

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \alpha$$

が存在するとき、f は a において微分可能であるといい、α を $f'(a)$ で表す。

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$