極大値、極小値

$$0 < |X - A| < \delta \Rightarrow f(X) < f(A)$$

となる $\delta > 0$ が存在するとき、f は A において極大値を取る、という。

同様にして、極小値も定義される。

極大値と極小値をあわせて極値という。

正定値、負定値、不定値

H : 実対称行列として、

1. ${}^t\mathbf{h}H\mathbf{h} > 0\ for\ \forall\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$ が成り立つとき、H は正定値であるという。
2. ${}^t\mathbf{h}H\mathbf{h} < 0\ for\ \forall\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$ が成り立つとき、H は負定値であるという。
3. ${}^t\mathbf{p}H\mathbf{p} > 0$ なる $\mathbf{p}$ と、${}^t\mathbf{q}H\mathbf{q} < 0$ なる $\mathbf{q}$ が存在するとき、H は不定値という。

定理 4.1

$f : D$ 上微分可能とすると、

$$f \text{ が } A \text{ において極大値を取る}$$
$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(A) = 0\ (i = 1, \cdots, n)$$

定理 4.2

$$D \subset \mathbb{R}^n, \text{開集合}, f \in C^2(D)$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(A) = 0\ (i = 1, \cdots, n)$$

このとき

$$H = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(A)\right)\ (Hesse\ \text{行列})\ \text{として}$$

1. H が正定値　$\Rightarrow f$ は A において極小
2. H が負定値　$\Rightarrow f$ は A において極大
3. H が不定値　$\Rightarrow A$ は f の saddle point

一般の n について

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & \ldots & h_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ h_{n1} & \ldots & h_{nn} \end{pmatrix}$$

に対し、

$$\triangle_1 = h_{11}, \triangle_2 = det\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}, \cdots, \triangle_n = detH$$

とするとき、

1. H が正定値 $\Leftrightarrow$
   $\triangle_i > 0\ (i = 1, \cdots, n)$ ★
2. H が負定値 $\Leftrightarrow$
   $(-1)^i\triangle_i > 0\ (i = 1, \cdots, n)$ ★★
3. $\det H \neq 0$ のときは、
   H が不定値 $\Leftrightarrow$ ★ でも ★★ でもない。