2007年度　数学 I_A 前期試験　理科１類 6,7,8,13,14,15 組　（担当　上村）
2007年９月４日（火）10:50 ー 12:20
両面解答用紙１枚　計算用紙１枚

（注）教科書，ノート類の持ち込みはしてはいけない。

問１　次の命題は正しいか誤りかを判定し，正しければ証明し誤りならば反例を挙げよ。

(1) 数列 $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ が 0 に収束すれば，$b_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ で定義される数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束する.

（２）数列 $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ が有界数列ならば，$b_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2}$ で定義される数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束する.

問２　$z = f(x, y)$ が $\boldsymbol{R}^2$ 上の C^2 級の関数で，常に $z + x = \sin(z + y)$ をみたすものとする．このとき，次の問に答えよ.
(1) $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}$ は定数であることを示し，その定数の値を求めよ.
(2) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ は定数であること示し，その定数の値を求めよ.

問３　$\boldsymbol{R}^3$ 上の微分可能な関数 $f(x, y, z)$ がすべての $t \in \boldsymbol{R}$ とすべての $(x, y, z) \in \boldsymbol{R}^3$ に対し $f(tx, ty, tz) = tf(x, y, z)$ を満たすならば，$f(x, y, z) = ax + by + cz$ である（ただし a, b, c は定数）ことを示せ.

問４　(1)$\log(1 + x)$ を $x = 0$ を中心として Taylor 展開せよ．また，この展開が $|x| < r$ で成立する正数 r の上限を求めよ.

(2)$\log \frac{1+x}{1-x}$ を $x = 0$ を中心として Taylor 展開せよ．また，この展開が $|x| < r$ で成立する正数 r の上限を求めよ.

(3) 極限
$$\lim_{x \to 0} \frac{\log \frac{1+x}{1-x} - 2 \sin x}{x^n}$$
が存在して 0 でないように自然数 n を定め，そのときのこの極限の値を求めよ.

問５　関数 $f(x, y) = x^3 - x - 2xy + y^2$ の極値を求めよ。