2009 年度夏学期 数学 IB

お詫び

作るの遅くて申し訳ありません。しかも遅い割にそんなに大したこと書いてないです。
数 IB の皆様におかれましては、とりあえず教科書やるのが一番ですので、このシケプリはあくまで補助としてお使いください。補助にもならないとか言わないで。

はじめに

基礎理論を重視する IA と違い、数学 IB は、実際の例や具体的計算を数多く扱うことに重きを置いている、という話です。この精神に則って、このプリントでは定理の証明とかそもそも定理自体載せていません。教科書に書いてありますので、そちらを参照してください。(代表的な微分・積分公式とか三角関数関連の公式とかは教科書 p.260 以降を参照)
ただし、微分方程式に関する話だけは教科書に載ってないので解説しました。
先生の話だと試験の 8 割は教科書とか数学演習の問題からそのまま出るらしいので、教科書やりましょう。

とりあえず、教科書の間違えを正したり、微妙な補足を入れたりしたもののまとめと、コラム的なやつを 1 つだけ[*1]載せました。教科書の補助に努めたつもりです。

注意してるつもりですが、間違いとかあったら言ってくれると助かります。

というわけで試験がんばりましょう。

担当： 森、内海

[*1] ホントは $\epsilon - \delta$ 論法とかの説明したかったけど、IB にはたぶん要らないし、それに時間が足りない…

試験情報

まずは試験に関する情報をまとめておきます。

1. 試験は 9 月 1 日 (火) 10:55〜 (90 分) @ 723 教室 で行われます。持ちこみ不可。学生証とか忘れずに。

2. 出題範囲は教科書の第 1 章〜第 4 章 (ただし広義積分は除く) と数学演習でやった問題です。

3. (重要) 試験問題は大問 4 つぐらいで、そのうち約 8 割は教科書や数学演習の問題からそのまま出題されるようです。また、しつこく「証明問題は出るのか」と先生にお尋ねしたところ、「数 IB だからあんまり出すつもりはない」的なコメントをいただきました。まあ参考程度に。1 問くらいは出ると思うんですけどね。どう受け取るかは各人に任せますが。

微分方程式 (求積法)

微分方程式というのは、関係式の中に f' とか f'' の微分された関数が入っているもののことをいいます。微分方程式を解く、というのは、与えられた微分方程式を満たすような関数を (すべて) 求めることをいいます。

授業で出た解法は以下の 4 つの形の微分方程式に対してでした。

1. $f'(x) = af(x) \ \ (a \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R})$ の形
2. 変数分離形：$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \qquad (f, g$ は与えられた関数$)$
3. 同次形：$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$
4. 1 階線形微分方程式： $\frac{dy}{dx} + P(x)y = g(x)$

順次解法を見ていきましょう。ただし、以下の解法はみんな定義域とか考えてません。

1 について

これについては解法も何も、

$$f(x) = Ce^{ax} \qquad (C \in \mathbb{R} \text{ は任意定数})$$

しかないです。この形に限られます。

2 について

変数分離形とは、名前のごとく x と y が完全に分離できる形のことです。解き方は、

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \Leftrightarrow \frac{1}{g(y)}\frac{dy}{dx} = f(x)$$

と変形して、両辺を x で積分します。

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$$

となって、これで微分形の関数がなくなったので解けたことになります。
例としては、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-1}{x^2y}$$

は変数分離形で解けるもので、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{y-1}{y} \qquad \therefore \int \frac{y}{y-1}dy = \int \frac{dx}{x^2} \Leftrightarrow \int \left(1 + \frac{1}{y-1}\right)dy = \int \frac{dx}{x^2}$$

$$\therefore y + \log|y-1| = -\frac{1}{x} + C$$

のように解きます。

3 について

同次形とは、x と y の次数が同じであるような形の微分方程式のことです。要するに、適当に式変形したら $\frac{y}{x}$ の形に変数がまとめられて、見てわかるように $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$ と書けるもののことです。
解き方は、$u = \frac{y}{x}$ とおいて、$y = ux$ とし、両辺を x で微分すると、

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{du}{dx} + u$$

すると、微分方程式は、

$$x\frac{du}{dx} + u = f(u) \qquad \therefore \frac{du}{dx} = \frac{f(u) - u}{x}$$

と変形できて、変数分離形に帰着されます。
例として、

$$(x^2 + y^2)\frac{dy}{dx} = xy$$

は、x と y の次数が同じなので同次形で、変形すると、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{\frac{y}{x}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

となります。$u = \frac{y}{x}$ とおいて、先程のやり方を適用すると、

$$f(u) = \frac{u}{1 + u^2}$$

で、

$$\frac{du}{dx} = \frac{f(u) - u}{x} \qquad \therefore \int \frac{du}{f(u) - u} = \int \frac{dx}{x}$$

であるから、

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= -\int \left(\frac{1}{u^3} + \frac{1}{u}\right) du = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{u^2} - \log|u| \\ (\text{右辺}) &= \log|x|\end{aligned}$$

より、

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{u^2} - \log|u| = \log|x| + C$$

$u = \frac{y}{x}$ を代入して整理すると、

$$2\log|y| - \frac{x^2}{y^2} = C$$

と解けます。

4 **について**

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = g(x)^{*2} - (*)$$

これが今までで一番難しい形の微分方程式です。解き方はいろいろあって、今回は授業ででた定数変化法と、もうひとつのやり方を示します。
一応この形の微分方程式の解は、

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left\{ \int \left(g(x) e^{\int P(x)dx} \right) dx + C \right\}$$

の形らしいですが、まあこれをそのまま使って答える、はできないでしょう。たぶん。

まずは定数変化法の説明。
はじめに $g(x) \equiv 0$ だとして、 y を求めます。[*3]

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0 \Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -P(x)$$

より、これは変数分離形で、

$$\int \frac{dy}{y} = -\int P(x)dx \Leftrightarrow y = Ce^{-\int P(x)dx}$$

となります。
$g(x) \equiv 0$ のときはこれで終わりですが、実際には $g(x) \not\equiv 0$ のときもあります。その場合、先に求めた y の任意定数 C を、定数ではなく関数 $C(x)$ と考えて、$y = C(x)e^{-\int P(x)dx}$ の形の解を探します。[*4] $(*)$ に $y = C(x)e^{-\int P(x)dx}$ を代入して、

$$\begin{aligned} C'(x)e^{-\int P(x)dx} + C(x)e^{-\int P(x)dx} \cdot \{-P(x)\} + P(x)C(x)e^{-\int P(x)dx} &= g(x) \\ \therefore C'(x) &= g(x)e^{\int P(x)dx} \\ \therefore C(x) &= \int \left(g(x)e^{\int P(x)dx} \right) dx + C_0 \\ \therefore y = C(x)e^{-\int P(x)dx} &= e^{-\int P(x)dx} \left\{ \int \left(g(x)e^{\int P(x)dx} \right) dx + C \right\} \end{aligned}$$

よって、この微分方程式が解けるわけです。この手順でやればまず大丈夫だと思います。

もうひとつの解き方の説明をしましょう。まず、$(*)$ の両辺に $e^{\int P(x)dx}$ をかけます。すると、

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx}e^{\int P(x)dx} + yP(x)e^{\int P(x)dx} &= g(x)e^{\int P(x)dx} \\ \left(ye^{\int P(x)dx} \right)' &= g(x)e^{\int P(x)dx} \end{aligned}$$

[*2] $g(x) \equiv 0$ のときを同次形、$g(x) \not\equiv 0$ のときを非同次形という
[*3] この操作を「補助方程式を解く」というらしい
[*4] この操作が定数変化法と呼ばれる所以じゃないかと

と変形できますね。両辺を x で積分して、

$$ye^{\int P(x)dx} = \int \left(g(x)e^{\int P(x)dx}\right) dx + C$$
$$y = e^{-\int P(x)dx} \left\{\int \left(g(x)e^{\int P(x)dx}\right) dx + C\right\}$$

となって y が求められます。

例として、

$$\frac{dy}{dx} - 2y = e^{3x} \quad -(1)$$

でやります。定数変化法では、まず

$$\frac{dy}{dx} - 2y = 0$$

を解きます。$y = Ce^{2x}$ ですね。次に、$C = C(x)$ として、(1) に $y = C(x)e^{2x}$ を代入します。すると、

$$C'(x)e^{2x} + 2C(x)e^{2x} - 2C(x)e^{2x} = e^{3x}$$
$$\therefore C'(x) = e^{x}$$
$$\therefore C(x) = e^{x} + C$$
$$\therefore y = (e^{x} + C)e^{2x} = e^{3x} + Ce^{2x} \quad \square$$

別のやり方では、$P(x) = -2$ より $\int P(x)dx = -2x + C_0$ なので、

$$e^{\int P(x)dx} = C_1e^{-2x}$$

を (1) の両辺に掛けると、

$$\frac{dy}{dx}C_1e^{-2x} - 2yC_1e^{-2x} = C_1e^{x} \Leftrightarrow \left(ye^{-2x}\right)' = e^{x} \qquad \therefore ye^{-2x} = e^{x} + C$$
$$\therefore y = (e^{x} + C)e^{2x} = e^{3x} + Ce^{2x} \quad \square$$

とまあこんな感じで解けます。

教科書の訂正のまとめ

ここでは教科書の間違いを直したり、補足したりしてます。式の途中のホントにどうでもいい間違えは極力省きました。

まとめのページ

- (p.19 上)
$$I_m = \frac{x-a}{2(m-1)b^2\{(x-a)^2+b^2\}^{m-1}} + \frac{2m-3}{2(m-1)} I_{m-1}$$
ではなく
$$I_m = \frac{x-a}{2(m-1)b^2\{(x-a)^2+b^2\}^{m-1}} + \frac{2m-3}{2(m-1)\mathbf{b^2}} I_{m-1}$$
です。間違えないように。

第 1 章 実数の性質と数列

- (p.50 例題 102) $K=2$ ではなく $K^2=2$ なので　$K=\sqrt{2}$ です。

- (p.54 問 112 (4)) 証明が少しわかりにくい気がするので、補足して説明。
$\sqrt{n}-\sqrt{m}$ についての問題ですが、任意の $x\in\mathbb{R}$ に対して $n=[(p+x)^2]$, $m=p^2$ とおきます ($p\in\mathbb{N}$)。
それで $x_p=\sqrt{n}-\sqrt{m}$ とすると、 $\sqrt{(p+x)^2-1}-p<x_p\le x$,　かつ,
$$\sqrt{(p+x)^2-1}-p = \frac{2x+\frac{x^2-1}{p}}{\sqrt{(1+\frac{x}{p})^2-\frac{1}{p^2}}+1} \to x \quad (p\to\infty)$$
つまりはさみうちの原理より $x_p\to x$ となるので、$p\to\infty$ においては $x_p=\sqrt{n}-\sqrt{m}$ は任意の実数 x を表せるわけです。よって、解答の表の通り。

第 2 章 連続関数

- (p.66 問 204 (2)) 解答の途中ですが、不等式　を用いて $\lim\limits_{x\to\infty}(x-f(x))=+\infty$ はいいのですが、その後の極限は再び不等式　を用いて $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-f(x))=-\infty$ となります (解答には不等式　から導くとなっていますが、少なくとも筆者は不可能な気が…)。てかこうじゃないと中間値の定理が使えません。

- (p.69 類題 207) 証明しておきます。出ないと思うけど。そしてあんまりうまい証明じゃなくてすみません。
(1)
$$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$$

において、$x=y=0$ とすると、$f(0)=0$

まず、任意の有理数 r に対して $f(rx)=r\{f(x)+(r-1)x^2\}-(*)$ となることを示す。

自然数 m に対しては、m に関する数学的帰納法により $(*)$ が成り立つことを容易に示せる。(簡単なので割愛)

$m=0$ のときも、$f(0)=0$ より成り立つ。

負の整数 $-n$ については、$f(-nx)=-n\{f(x)-(n+1)x^2\}-(*)'$ が n に関しての帰納法で成り立つことが示される。(これも割愛) $m=-n$ とおくと、

$$f(mx)=m\{f(x)-(-m+1)x^2\}=m\{f(x)+(m-1)x^2\}$$

より負の整数 m についても $(*)$ は成り立つ。したがって、任意の整数 m について $(*)$ は成り立つ。

次に有理数 $r=\pm n/m(n,m$:自然数) に対して

$$\begin{aligned}
m\{f(rx)+(m-1)(rx)^2\} &= f(mrx)\\
&= f(\pm nx)\\
\therefore\ m\{f(rx)+(m-1)(rx)^2\} &= \pm n\{f(x)+(\pm n-1)x^2\}\\
f(rx)+(m-1)(rx)^2 &= \pm\frac{n}{m}\{f(x)+(\pm n-1)x^2\}\\
f(rx) &= -r(m-1)rx^2+r\{f(x)+(\pm n-1)x^2\}\\
&= r(-mrx^2+rx^2+f(x)+mrx^2-x^2)\\
\therefore\ f(rx) &= r\{f(x)+(r-1)x^2\}
\end{aligned}$$

よって、$f(1)=c+1$ とおくと、

$$\begin{aligned}
f(r)=f(r\cdot 1) &= r\{f(1)+(r-1)\cdot 1^2\}\\
&= r\{(c+1)+(r-1)\}\\
\therefore\ f(r) &= r^2+cr
\end{aligned}$$

したがって、任意の有理数 r について $f(r)=r^2+cr$ が成り立つ。
ここで、任意の実数 x について、x に収束する有理数列 $\{r_n\}$ が存在する。$f(x)$ は連続関数であるから、

$$f(x)=f(\lim_{n\to\infty} r_n)=\lim_{n\to\infty} f(r_n)=\lim_{n\to\infty}(r_n^2+cr_n)=x^2+cx\ \Box$$

(2) まず任意の有理数 r に対して $f(x^r)=rf(x)-(*)$ が成り立つことを示す。

自然数 m に対しては $(*)$ は帰納法で容易に証明可。

また $f(xy) = f(x) + f(y)$ において、$x = y = 1$ とすると $f(1) = f(1) + f(1) \quad \therefore\ f(x^0) = f(1) = 0$
$y = \frac{1}{x}$ とすると $f(1) = f(x) + f(\frac{1}{x}) \quad \therefore\ f(x^{-1}) = -f(x)$ よって負の整数 $-m$ に対しても成り立つ。
したがって、任意の整数 m について $(*)$ は成り立つ。

任意の有理数 r について、$r = \pm n/m(n, m$:自然数$)$ とおくと、

$$\begin{aligned} f(x^{mr}) &= f(x^{\pm n}) \\ mf(x^r) &= \pm nf(x) \\ f(x^r) &= \pm\frac{n}{m}f(x) \\ \therefore\ f(x^r) &= rf(x) \end{aligned}$$

よって、$x = e, f(e) = c$ とおくと、

$$f(x^r) = f(e^r) = rf(e) = cr \quad \therefore\ f(e^r) = cr$$

ここで、任意の実数 x について、x に収束する有理数列 $\{r_n\}$ が存在する。$f(x)$ 、e^x はともに連続関数であるから、

$$f(e^x) = f(e^{\lim_{n\to\infty} r_n}) = \lim_{n\to\infty} f(e^{r_n}) = \lim_{n\to\infty}(cr_n) = cx$$

したがって、$f(e^x) = cx$ が成り立つ。$y = e^x$ とおくと、$x = \log y$ より、$f(y) = c\log y$

$$\therefore\ f(x) = c\log x\ \square$$

(3) $f(x+y) + f(x-y) = 2\{f(x) + f(y)\}$ に $x = y = 0$ を代入すると、$2f(0) = 4f(0) \quad \therefore\ f(0) = 0$
また、$y = -x$ を代入すると、$f(0) + f(2x) = 2\{f(x) + f(-x)\}$ で、$f(2x) = 4f(x)$ より、$f(-x) = f(x) - (1)$
任意の有理数 r に対して $f(rx) = r^2 f(x) - (*)$ を示す。

まず、非負整数 m について $(*)$ を示す。$m = 0, 1$ のときは自明。$m = k-1, k$ のとき $(*)$ が成り立つとすると、$f((k-1)x) = (k-1)^2 f(x)$,$f(kx) = k^2 f(x)$ である。
$m = k+1$ のとき、

$$\begin{aligned} f(kx + x) + f(kx - x) &= 2\{f(kx) + f(x)\} \\ f((k+1)x) &= 2f(kx) + 2f(x) - f((k-1)x) \\ &= 2\cdot k^2 f(x) + 2f(x) - (k-1)^2 f(x) \\ &= \{2k^2 + 2 - (k-1)^2\}f(x) \\ \therefore\ f((k+1)x) &= (k+1)^2 f(x) \end{aligned}$$

よって、数学的帰納法により非負整数 m に対して $(*)$ が示された。また、(1) により負の整数 $-m$ に対しても、

$$f(-mx) = f(mx) = m^2 f(x)$$

より $(*)$ が成り立つので、任意の整数 m について $(*)$ は成り立つ。
さて、有理数 r に対して、$r = \pm n/m(n, m$:自然数$)$ とおくと、

$$\begin{aligned} f(mrx) &= f(\pm nx) \\ m^2 f(rx) &= n^2 f(x) \\ f(rx) &= \left(\frac{n}{m}\right)^2 f(x) \\ \therefore\ f(rx) &= r^2 f(x) \end{aligned}$$

よって、有理数 r についても成り立つ。$f(1) = c$ とおくと、

$$f(r) = f(r \cdot 1) = r^2 f(1) = cr^2$$

ここで任意の実数 x に対して、x に収束する有理数列 $\{r_n\}$ が存在する。$f(x)$ は連続関数なので、

$$f(x) = f(\lim_{n\to\infty} r_n) = \lim_{n\to\infty} f(r_n) = cx^2 \ \square$$

第 3 章 微分

- (p.74 問 302 (6)) 正しい答えは $12x^5 + 25x^4 + \mathbf{24}x^3 + 18x^2 + 8x + 3$
- (p.76 例題 303 (2)) $\frac{du}{dx} = \frac{\mathbf{x^2-2x-1}}{(x-1)^2}$ です。よって、正答は $\frac{\mathbf{x^2-2x-1}}{2(x^2+1)(x-1)}$
- (p.77 問 304 (3)) 問題と解答で相手にしている関数が違っています。たぶん問題の方が間違っているのでしょうね。
- (p.79 問 306 (2)) まずは解答の 2 段目で、微分が間違ってますね。$(x^{2n}-1)' = 2nx^{2n-1}$ です。まあ最終的な $\frac{du}{dx}$ の値は正しいのですが。
  そんな揚げ足取りはともかくとして、問題はここから。

$$\begin{aligned} \left(\cos^{-1}\left(\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}\right)\right)' &= \left(\frac{d}{du}\cos^{-1} u\right)\frac{du}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{4nx^{2n-1}}{(x^{2n}+1)^2} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\mathbf{x^{2n}-1}}{\mathbf{x^{2n}+1}}\right)^{\mathbf{2}}}}\frac{4nx^{2n-1}}{(x^{2n}+1)^2} = -\frac{x^{2n}+1}{\sqrt{4x^{2n}}}\frac{4nx^{2n-1}}{(x^{2n}+1)^2} \\ &= -\frac{2nx^{2n-1}}{|x|^n(x^{2n}+1)} \end{aligned}$$

となるはず。解答は二乗していませんね。あとは x が正か負かによって場合分けして答えを書けばいいです。

- (p.94 例題 321 (1)) 解答の 3 行目。正しくは

$$\log y = \sin(x-1)\log(-\log(x-1)) = \frac{\log(-\log(x-1))}{\frac{1}{\sin(x-1)}}$$

です。log が 1 つ抜けています。このまま続きをやってみましょう。とりあえずこの問題は $x \to 1+0$ の極限を考えてるので、x を 1 に十分近くとるとすれば (もちろん $x > 1$)、$-\log(x-1) > 0$ で真数条件を満たせます (一応確認)。よって、$\log(-\log(x-1))$ は定義できて、$\lim_{x\to 1+0} \log(-\log(x-1)) = +\infty$, $\lim_{x\to 1+0} \frac{1}{\sin(x-1)} = +\infty$ より、ロピタルの定理から、

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1+0} y &= \lim_{x\to 1+0} \frac{\log(-\log(x-1))}{\frac{1}{\sin(x-1)}} = \lim_{x\to 1+0} \frac{\frac{1}{-\log(x-1)} \cdot \frac{-1}{x-1} \cdot 1}{\frac{-\cos(x-1)}{\sin^2(x-1)}} \\ &= \lim_{x\to 1+0} \frac{-\sin^2(x-1)}{(x-1)\cos(x-1)\log(x-1)} \\ &= \lim_{x\to 1+0} \left[\left(\frac{\sin(x-1)}{x-1} \right)^2 \cdot \frac{x-1}{\cos(x-1)} \cdot \frac{1}{-\log(x-1)} \right] = 1^2 \cdot 0 \cdot 0 = 0\end{aligned}$$

よって、$\lim_{x\to 1+0} y = 1$ 　より

$$\lim_{x\to 1+0} (-\log(x-1))^{\sin(x-1)} = 1 \quad \square$$

結局答えは同じなようです。

- (p.96 例題 323 (2)) これも問題と解答で扱っている関数が違いますね。問題が間違っている、ということで。まあ問題の関数のが簡単ですが。

第 4 章 積分

- (p.126 例題 423 (1)) 間違いとかではありませんが、$\tan^{-1}$ の和の計算方法について少し説明。
$a = \tan^{-1} x, b = \tan^{-1} y$ とおくと、$x = \tan a, y = \tan b$ で、

$$\begin{gathered}\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} = \frac{x+y}{1-xy} \\ \therefore a+b = \tan^{-1} \frac{x+y}{1-xy}\end{gathered}$$

となります。解答の下から 2 段目→ 1 段目については、

$$\begin{aligned}\tan^{-1}(\sqrt{2}x-1)+\tan^{-1}(\sqrt{2}x+1) &= \tan^{-1}\frac{(\sqrt{2}x-1)+(\sqrt{2}x+1)}{1-(\sqrt{2}x-1)(\sqrt{2}x+1)} \\ &= \tan^{-1}\frac{2\sqrt{2}x}{2-2x^2} \\ &= \tan^{-1}\frac{\sqrt{2}x}{1-x^2}\end{aligned}$$

- (p.126 例題 423 (2)) ここでは部分分数分解について。積分の常套手段としてやることが多い部分分数分解ですが、まあこれめんどくさいんですよね。そして解説には大抵分解した結果しか載っていません。やり方を知っていればいいですが、あまりにも不親切な気がします。なので…あんまり役に立たないかもですが、一応解説します。
  まず、
  $$\frac{1}{(x-1)^2(x^2+1)^3}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}+\frac{Ex+F}{(x^2+1)^2}+\frac{Gx+H}{(x^2+1)^3}$$
  とおきます。ここはこうするしかないでしょうね。たぶん。
  やり方としては、
  1. 分母を払って、x のついて降べきの順に整理、そして係数比較して解く

  があります。具体的には、

$$\frac{1}{(x-1)^2(x^2+1)^3}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}+\frac{Ex+F}{(x^2+1)^2}+\frac{Gx+H}{(x^2+1)^3}$$

$$\begin{aligned}1 &= A(x-1)(x^2+1)^3+B(x^2+1)^3+(Cx+D)(x-1)^2(x^2+1)^2 \\ &\quad +(Ex+F)(x-1)^2(x^2+1)+(Gx+H)(x-1)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1 &= A(x^7-x^6+3x^5-3x^4+3x^3-3x^2+x-1)+B(x^6+3x^4+3x^2+1) \\ &\quad +C(x^7-2x^6+3x^5-4x^4+3x^3-2x^2+x)+D(x^6-2x^5+3x^4-4x^3+3x^2-2x+1) \\ &\quad +E(x^5-2x^4+2x^3-2x^2+x)+F(x^4-2x^3+2x^2-2x+1) \\ &\quad +G(x^3-2x^2+x)+H(x^2-2x+1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1 &= (A+C)x^7+(-A+B-2C+D)x^6+(3A+3C-2D+E)x^5 \\ &\quad +(-3A+3B-4C+3D-2E+F)x^4+(3A+3C-4D+2E-2F+G)x^3 \\ &\quad +(-3A+3B-2C+3D-2E+2F-2G+H)x^2 \\ &\quad +(A+C-2D+E-2F+G-2H)x+(-A+B+D+F+H)\end{aligned}$$

  …とかやって、あとは係数比較で連立方程式を解けばいいだけですが、まあそもそもここまで正しく計算できるかどうかも怪しいし、てかめんどくさすぎです。時間がかかりすぎて、現実的ではありません。
  というわけで、次の方法がいいんじゃないかと思います。知っている人も多いと思いますが。

2. 分母を払って、x に具体的な値を代入する。それでもすべての未知数が求められないときは、両辺を微分して、また x に具体的な値を代入する
この方法でやってみます。

$$\begin{aligned}1 = A(x-1)(x^2+1)^3 + B(x^2+1)^3 + (Cx+D)(x-1)^2(x^2+1)^2 \\ +(Ex+F)(x-1)^2(x^2+1) + (Gx+H)(x-1)^2 - (1)\end{aligned}$$

$x=1$ を代入

$$1 = 8B \qquad \therefore B = \frac{1}{8}$$

$x=i$ を代入

$$1 = (Gi+H)(i-1)^2 \Leftrightarrow (2G-1) - 2Hi = 0 \qquad G = \frac{1}{2}, \quad H = 0$$

$x=0$ を代入

$$1 = -A+B+D+F+H \Leftrightarrow -A+D+F = \frac{7}{8} - (2)$$

(1) を x について微分

$$\begin{aligned}0 = &A(x^2+1)^3 + 6Ax(x-1)(x^2+1)^2 + 6Bx(x^2+1)^2 \\ &+\{C(x-1)^2(x^2+1)^2 + 2(Cx+D)(x-1)(x^2+1)^2 + 4x(Cx+D)(x-1)^2(x^2+1)\} \\ &+\{E(x-1)^2(x^2+1) + 2(Ex+F)(x-1)(x^2+1) + 2x(Ex+F)(x-1)^2\} \\ &+\{G(x-1)^2 + 2(Gx+H)(x-1)\} - (3)\end{aligned}$$

(3) に $x=1$ を代入

$$0 = 8A + 24B \qquad \therefore A = -3B = -\frac{3}{8}$$

(3) に $x=i$ を代入

$$0 = 2i(Ei+F)(i-1)^2 + G(i-1)^2 + 2(Gi+H)(i-1) \Leftrightarrow (4F-2G-2H) + i(4E-4G+2H) = 0$$

$$\therefore 4F-2G-2H = 0 \Leftrightarrow F = \frac{1}{2}G = \frac{1}{4} \ ,4E-4G+2H = 0 \Leftrightarrow E = G = \frac{1}{2}$$

(2) より、

$$D = A - F + \frac{7}{8} = \frac{1}{4}$$

(3) に $x=0$ を代入

$$0 = A + C - 2D + E - 2F + G - 2H \Leftrightarrow C = -A + 2D - E + 2F - G + 2H = \frac{3}{8}$$

以上より、

$$\frac{1}{(x-1)^2(x^2+1)^3} = \frac{-\frac{3}{8}}{x-1} + \frac{\frac{1}{8}}{(x-1)^2} + \frac{\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}}{x^2+1} + \frac{\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}}{(x^2+1)^2} + \frac{\frac{1}{2}x}{(x^2+1)^3}$$

元々 (1) は x の恒等式になるので、x にどんな値を入れても成り立たなければならない、ということを利用して求めるわけです。こっちのが現実的だと思われます。
当然、あらゆる部分分数分解に応用可能です。たとえば (p.127 問 424 (5)) なら

$$\frac{x^3}{(x-1)(x-2)(x-3)} = 1 + \frac{6x^2-11x+6}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

より、

$$\frac{6x^2-11x+6}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}$$

とおくと、分母を払って、

$$6x^2-11x+6 = A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2)$$

これに $x=1,2,3$ を順次代入していくと、$A=\frac{1}{2}$,$B=-8$,$C=\frac{27}{2}$ と求められて、

$$\frac{x^3}{(x-1)(x-2)(x-3)} = 1 + \frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{-8}{x-2} + \frac{\frac{27}{2}}{x-3}$$

と分解できます。

- (p.127 問 424 (1)) 数学演習でも指摘されてましたが、答えの

$$\sqrt{3}\tan^{-1}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$$

は、

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$$

の間違いです。あと、

$$\int\frac{dx}{(x-a)^2+b^2} = \frac{1}{b}\tan^{-1}\frac{x-a}{b}$$

は覚えるべき。

$$I_{m+1} = \frac{x-a}{2mb^2\{(x-a)^2+b^2\}^m} + \frac{2m-1}{2mb^2}I_m$$

もよく使うので覚えたほうが楽です。

おまけ

ほんとはもっと書くつもりでしたが、まあ一応載せときます。だいぶ前に作ってたやつ。

一様連続

ここでは、“一様連続”について少し説明します。今回は少し違う視点から考察してみます。

まず“一様連続”の定義は、 $f(x)$ が区間 $I \subset \mathbb{R}$ 上の関数であるとき、

$$^{\forall}\epsilon > 0, ^{\exists}\delta > 0 \ \ s.t. \ \ x, x' \in I, \ \ |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \epsilon$$

というもの。要するに、ある関数において、定義域内から適当に 2 つの点を指定するとき、定義域内であればその 2 つの点の x 座標の間隔がどんなに狭くても (たとえば 10^{-10} しか離れていないとしても)、逆にどんなに広くても (例えば 10^{10} くらい離れてても)、また同じ間隔でも定義域のどこから 2 点を選んでも (2 点の x 座標の間隔が 10 だとしたら、$(x_1, x_2) = (1, 11)$ ととっても、$(x_1, x_2) = (10^{10}, 10^{10} + 10)$ ととったとしても)、その 2 点の y 座標の間隔は必ずある実数 ϵ(まあ $\epsilon = 10^{20}$ とかにしとけば大丈夫そうですよね) よりも小さくなりますよ、ということなんですが。この定義をちょっと変形してみると、

$$\left| \frac{f(x) - f(x')}{x - x'} \right| \leq M \qquad (M \in \mathbb{R})$$

となる M が存在すれば、$\delta = \frac{\epsilon}{M}$ とすることにより、δ はこの定義を満たします。なぜなら M は実数定数なので、任意の $\epsilon > 0$ に対して上述のような δ が必ず存在し、$|x - x'| < \delta$ と $\delta M = \varepsilon$ であることを利用して、

$$\left| \frac{f(x) - f(x')}{x - x'} \right| \leq M \Leftrightarrow |f(x) - f(x')| \leq M\,|x - x'| < M\delta = \epsilon$$

となるから。さて、ここで $f(x)$ は $[x, x']$ において連続,(x, x') において可微分とすると、平均値の定理より、

$$\frac{f(x) - f(x')}{x - x'} = f'(c)$$

を満たす $c \in (x, x')$ が存在します。つまり $f'(x)$ が常に $f'(x) \leq M$ を満たすような M が存在すればこの定義を満たす δ が存在することになります。

つまり、“一様連続”というのは、「関数の値の変化率が有限である」ような連続性のことです。だから $y = \frac{1}{x}, \ \ x \in (0, 1]$ 　みたいな関数は $y' = -\frac{1}{x^2}$ より $\lim_{x \to +0} y' = -\infty$ となり、“一様連続”ではないわけ。また、「閉区間で定義されている連続関数は一様連続」というのも、当然と言えば当然ですね。

$f(x)$ が一様連続であることを判断するためには、以下のような操作をするのがいいと思います。

$f(x)$ が可微分のとき

1. まず $f(x)$ を微分
2. 導関数 $\leq M$ となるような M を探す→条件をみたす M が存在したらその関数は一様連続
3. (証明とかでは)$\delta = \frac{\epsilon}{M}$ とおいて $\epsilon - \delta$ 論法を用いて証明

可微分じゃなかったら、微分可能でない点で区間を区切って、無理矢理平均値の定理を使えるようにするもよし、定義に戻って調べるのもよし。やりやすいようにやればいいと思います。

“一様連続”と“連続”の違いについてですが、これは上記の内容を考えれば明らか。“連続”はただ関数がグラフ上で各点で繋がっていればいいわけですけど、“一様連続”はそのことに加えて、定義域内で、変数に依存せずに、関数の変化を任意の範囲内に収められないといけません。関数の変化率の上限・下限が実数定数でなければならないわけです。よって、“一様連続”$\Rightarrow$“連続”は言えても逆は成り立ちません。