定理 3.1 (ロピタル)

1. $f, g : [a, b]$ 上連続、(a, b) 上微分可能

   $$f(a) = g(a) = 0, \quad g'(a) \neq 0 \quad for \quad \forall x \in (a, b)$$

   このとき、

   $$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

2. $f, g : (R, \infty)$ 上微分可能

   $$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} g(x) = 0$$

   $$g'(x) \neq 0 \quad for \quad \forall x \in (R, \infty)$$

   このとき、

   $$\lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \Rightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

定理 3.2

$f(x)$ は c を含む開区間上 n 回微分可能とすると、
$x \to \infty$ のとき、

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n + R_{n+1}(x)$$

ただし、$R_{n+1}(x) = o((x - c)^n)$

定理 3.3 (剰余項の表現)

f は c を含む区間 (a, b) で $(n + 1)$ 回微分可能とすると、$\forall x \in (a, b)$ と $s > 0$ に対し、

$$R_{n+1} = \frac{f^(n + 1)(\theta x + (1 - \theta)c)}{n!s}(1 - \theta)^{n+a-s}(x - c)^{n+1}$$

となる $\theta(0 < \theta < 1)$ が存在する。

補題 3.4

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x^n}{n!} = 0 \quad for \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

剰余項の表示法

·Lagrange の剰余項 $(s = n + 1)$

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x + (1 - \theta)c)}{(n + 1)!}(x - c)^{n+1}$$

·Cauchy の剰余項 $(s = 1)$

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x + (1 - \theta)c)}{n!}(1 - \theta)^n (x - c)^{n+1}$$

Taylor 展開の具体例

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \ldots \ (-\infty < x < \infty)$$

$$sinx = x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n + 1)!}x^{2n+1} + \ldots \ (-\infty < x < \infty)$$

$$cosx = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \ldots \ (-\infty < x < \infty)$$

$$log(1 + x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n + \ldots \ (-1 < x \leq 1)$$