大門線形代数

053M

問題 1-4

1. (1) 方程式: $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

係数行列 $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

拡大係数行列 $\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{array}\right]$ //

(2) 同様に
方程式から順に,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \end{array}\right]$ //

2. (1) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ -x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 - x_3 = -2 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 3x_1 + x_3 = -1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$ //

3. (1) $x_1 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ とおくと.

$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = -2 \\ -x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$ より

$(x_1, x_2) = \left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$ となるため.

$a = -\frac{3}{4} b_1 + \frac{1}{4} b_2$ //

(2) 同様にして. x_1, x_2 を用いて,

$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ 3x_1 + 3x_2 = 2 \\ x_2 = 1 \end{cases}$ ⇒ 解なし (表せない)

4 (1) $x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ を満たす

x_1, x_2 が存在すればよいので.

$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = a \\ 2x_1 + 3x_2 = 2 \\ x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$ より

$(x_1, x_2) = (7, -4)$ から $a = -1$ //

(2) 同様に x_1, x_2 を用いると.

$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ -x_1 + x_2 = a \\ x_1 + 3x_2 = b \end{cases}$ より a, b を x_2 で表すと

$a = 3x_2$. $b = x_2$ より $a = 3b$ //

5 代入すると.

$u = (2u_1 + 3u_2) - 3(-u_1 + 4u_2)$

$= 5u_1 - 9u_2$ //

6. $u = b_1 u_1 + b_2 u_2 + \cdots + b_s u_s$ ①

$u_1 = a_{11} u_1 + \cdots + a_{1r} u_r$ ②

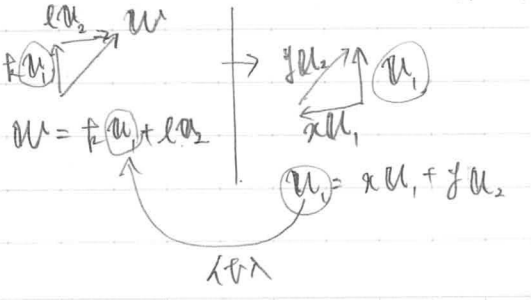
②を①に代入していくと.

$u = (b_1 \cdot a_{11} + b_2 \cdot a_{21} + \cdots + b_s a_{s1}) u_1$

$+ \cdots + (b_1 a_{1r} + \cdots + b_s a_{sr}) u_r$

となるため. 題意は示された //

問6 のイメージ (u, u_1, u_2, u_1', u_2' を用いて)



入門線形代数

0534

問題 2-1

1 (1) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = -1 \\ x_1 - x_2 = 2 \end{cases}$

$\begin{cases} 5x_2 = -5 \quad (① - ② \times 2) \\ x_1 - x_2 = 2 \end{cases}$

$\begin{cases} x_2 = -1 \quad (① \div 5) \\ x_1 = 1 \quad (①/5 + ②) \text{ より} \end{cases}$

$(x_1, x_2) = (1, -1)$ //

(2) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 - 2x_2 = 8 \end{cases}$

$\begin{cases} 4x_1 = 8 \quad (① + ②) \\ x_1 - 2x_2 = 8 \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 = 2 \quad (①/4) \\ 2x_2 = -6 \quad (①/4 - ②) \text{ より} \end{cases}$

$(x_1, x_2) = (2, -3)$ //

(3) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ -x_1 + 3x_3 = 8 \\ x_2 - 2x_3 = -4 \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 4 \quad (② + ③) \\ x_2 - 2x_3 = -4 \end{cases}$

$\begin{cases} 3x_2 = 6 \quad (① + ②) \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_2 - 2x_3 = -4 \end{cases}$

$\begin{cases} x_2 = 2 \quad (①/3) \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ -2x_3 = -6 \quad (② - ①/3) \end{cases}$

$\begin{cases} x_2 = 2 \\ -x_1 = -1 \quad (② - ① + ③/2) \\ x_3 = 3 \quad (-③/2) \end{cases}$

より $(x_1, x_2, x_3) = (1, 2, 3)$ //

1 (4) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 4x_3 = 3 \quad (② - ①) \\ -x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -2 \end{cases}$ (以後省略)

$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_2 = 1 \quad (① + ③) \\ -x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -2 \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_2 = \frac{1}{2} \quad (②/2) \\ -5x_3 = -\frac{5}{2} \quad (① + ③ - \frac{3}{2}②) \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 = 1 \quad (① - ② - \frac{1}{5}③) \\ x_2 = \frac{1}{2} \\ x_3 = \frac{1}{2} \quad (-\frac{1}{5}③) \text{ より} \end{cases}$

$(x_1, x_2, x_3) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ //

2 (1)

3	1	−1	
1	−1	2	
4	0	1	Ⓐ
1	−1	2	
1	0	1/4	Ⓑ
0	−1	7/4	Ⓒ
1	0	1/4	
0	1	−7/4	Ⓓ

より

(2)

3	5	2	
1	3	0	
3	5	2	
0	4	−2	Ⓔ
3	0	9/2	Ⓕ
0	1	−1/2	Ⓖ
1	0	3/2	Ⓗ
0	1	−1/2	

より

$(x_1, x_2) = (\frac{1}{4}, -\frac{7}{4})$ $(x_1, x_2) = (\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$

各操作

Ⓐ : ① + ②　Ⓔ : ② × 3 − ①

Ⓑ : ①/4　Ⓕ : ① − ② × 5/4

Ⓒ : ② − 1/4　Ⓖ : ②/4

Ⓓ : −②　Ⓗ : ①/3

以上.