No. 03　　P10
Date 4 13
053M

入門線形代数

問題 1-2.

3 (3)

$$A^2 = \begin{bmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{bmatrix},$$

A^3からは指数が増えるのみ

$$A^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{bmatrix}$$

(4)

$$A^2 = \begin{bmatrix} a^2 & ab+b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} a^3 & a^2+ab+b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

…となるので、

$$A^n = \begin{bmatrix} a^n & (a^{n-1}+a^{n-2}+\cdots+a+1)b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{/\!/}$$

4. (1)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}$$ とすると、

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad BA = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ より

非可換。

(2) 同様にA, Bを定めると

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ で、

$$\begin{cases} a=c \text{ のとき可換.} \\ a \neq c \text{ のとき非可換。} \end{cases}$$

5 (左辺)$= \begin{bmatrix} 2a+c & -1 \\ 3a+4c & 6 \end{bmatrix}$ より 左辺-右辺を比較して

$$\begin{cases} 2a+c=1 \\ 3a+4c=-1 \end{cases}$$ から $a=1,\ c=-1$ より

$(a, b, c, d) = (1, -1, -1, 6)$。

6. E：単位行列より $E^2=E$, $AE=EA=A$ という性質から

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= (E^2+EA+\cdots+EA^{m-1}) - (AE+A^2+\cdots+A^m) \\ &= E+(A+\cdots+A^{m-1})-(A+\cdots+A^{m-1})-A^m \\ &= \underline{E} \quad (\because A^m=0)\end{aligned}$$

7. $A^m=B^n=0$ となる $(m, n \in \mathbb{N})$ があるとき、

$$(AB)^{mn} = (A^m)^n \cdot (B^n)^m = 0^n \cdot 0^m = 0$$ となり

$(AB)^{mn}=0$ から示せる。

8. 「上三角行列」

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & & \ddots & \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots\ 0 & a_{mn} \end{bmatrix}$$

左下部分が全て0の行列

和・差）各成分を足すので、

$A=[a_{ij}]$　$B=[b_{ij}]$ として

$C=A \pm B$ としたとき

$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij} = 0 \ (i>j)$ となる。

入門線形代数

053M

問題 1-2、1-3

8 (続き)

積) 例として5次で考える

$$A = \left[\begin{array}{c|c|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ \boxed{0} & \boxed{0} & 0 & a_{44} & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} \end{array}\right] \qquad B = \sim$$

(A同様に)

$AB = D$ とすると、

$$d_{42} = a_{41}b_{12} + a_{42}\cdot b_{22} + a_{43}b_{32} + a_{44}b_{42} + a_{45}b_{52}$$

$= 0$ (〜〜線部分はすべて0)

↓ Σを使って数学的にする

$$d_{42} = \sum_{k=1}^{5} a_{4k}b_{k2} \quad \text{で、}$$

$$= \sum_{k=1}^{3} \underbrace{a_{4k}}_{(=0)} b_{k2} + \sum_{k=4}^{5} a_{4k} \underbrace{b_{k2}}_{(=0)}$$

$$= 0 + 0 = 0$$

↓ これを一般化する (i>jのとき)

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

$$= \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=i}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

$\begin{cases} 1 \leqq k \leqq i-1 \text{ では } a_{ik} = 0 \\ \underbrace{i \leqq k \leqq n}_{(j \leqq i \leqq k)} \text{ では } b_{kj} = 0 \end{cases}$ より

$$d_{ij} = 0$$

よって $i > j$ のとき $d_{ij} = 0$ から、

A, Bが上三角行列のとき

A±B, AB も上三角行列。∎

1. $\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right]$ とすると、

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

E_2 (☆計算は楽に!)

$$= \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 13 & 10 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_2} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_2}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

同様に $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$D = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ から

求める積は $\left[\begin{array}{cc|cc} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 13 & 10 & 4 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$ //

2. $2a_1 + a_2 + 3a_3$

3. $AB = [\,2a_1 + 4a_2 \quad a_1 + 7a_2\,]$

4. $AB = \left[\begin{array}{c|c} A_1B_1 & 0 \\ \hline 0 & A_2B_2 \end{array}\right] = BA$ が示せる

(∵ A_1とB_1、A_2とB_2が可換)

5. $\begin{bmatrix} E_m & A \\ O & E_n \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} E_m & 2A \\ O & E_n \end{bmatrix}$ より これを

kに一般化して

$$\begin{bmatrix} E_m & A \\ O & E_n \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} E_m & kA \\ O & E_n \end{bmatrix}$$ //