

ルンゲ・クッタ法と丸め誤差との関係について

日本大学 理工学部 物理学科 4年 0126

三谷 健太

1. 目的

- ルンゲ・クッタ法を利用して簡単な常微分方程式を数値的に解くことによって、数値計算で生じる誤差について考える。

2 . 原理

- 2 - 1 . 常微分方程式の解析解
- 2 - 2 . 常微分方程式の数値解
- 2 - 3 . 丸め誤差

2 - 1 . 常微分方程式の解析解

3つの簡単な常微分方程式の
解析解について考える。

(変数分離法)

2 - 1 - 1 常微分方程式 1

$$\frac{dx}{dt} = t = f(t)$$

$$\int dx = \int t \cdot dt$$

$$x = \frac{t^2}{2} + c \quad (c: \text{積分定数})$$

ここで、初期条件（ $t = 0$ のとき $x(0) = 0$ ）より、
 $c = 0$ となるので解析解は次のようになる。

$$x(t) = \frac{t^2}{2}$$

2 - 1 - 2 常微分方程式 2

$$\frac{dx}{dt} = x = f(x)$$

$$\int \frac{1}{x} \cdot dx = \int dt$$

$$\log|x| = t + c \quad (c : \text{積分定数})$$

$$x = \pm e^{t+c} = \pm e^c \cdot e^t = C \cdot e^t \quad (C = \pm e^c : \text{定数})$$

ここで、初期条件 ($t = 0$ のとき $x(0) = 1$) より、
 $C = 1$ となるので解析解は次 のようになる。

$$x(t) = e^t = \exp(t)$$

2 - 1 - 3 常微分方程式 3

$$\frac{dx}{dt} = t \cdot x = f(t, x)$$

$$\int \frac{1}{x} \cdot dx = \int t \cdot dt$$

$$\log|x| = \frac{t^2}{2} + c \quad (c: \text{積分定数})$$

$$x = \pm e^{\frac{t^2}{2} + c} = \pm e^c \cdot e^{\frac{t^2}{2}} = C \cdot e^{\frac{t^2}{2}} \quad (C = \pm e^c : \text{定数})$$

ここで、初期条件 ($t = 0$ のとき $x(0) = 1$) より、
 $C = 1$ となるので解析解は次のようになる。

$$x(t) = e^{\frac{t^2}{2}} = \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$$

2 - 2 . 常微分方程式の数値解

3つの簡単な常微分方程式の数値解について考える。

(2次と4次のルンゲ・クッタ法)

2 - 2 - 1 2次のルンゲ・クッタ法

$$k_1 = f(t, x) \cdot dt$$

$$k_2 = f(t + dt, x + k_1) \cdot dt$$

$$t = t + dt$$

$$x = x + \frac{k_1 + k_2}{2}$$

2 - 2 - 2 4次のルンゲ・クッタ法

$$k_1 = f(t, x) \cdot dt$$

$$k_2 = f\left(t + \frac{dt}{2}, x + \frac{k_1}{2}\right) \cdot dt$$

$$k_3 = f\left(t + \frac{dt}{2}, x + \frac{k_2}{2}\right) \cdot dt$$

$$k_4 = f(t + dt, x + k_3) \cdot dt$$

$$t = t + dt$$

$$x = x + \frac{k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4}{6}$$

2 - 2 - 3 ルンゲ・クッタ法の誤差

ルンゲ・クッタ法による精度は、刻み幅(dt)に依存していて、2次のルンゲ・クッタ法では刻み幅の2倍、4次のルンゲ・クッタ法では刻み幅の4倍となっている。よって、ルンゲ・クッタ法による誤差は、次のようになる。

2 次のルンゲ・クッタ法

$dt = 0.1$ のとき 3 桁目から誤差

$dt = 0.01$ のとき 5 桁目から誤差

$dt = 0.001$ のとき 7 桁目から誤差

$dt = 0.0001$ のとき 9 桁目から誤差

4 次のルンゲ・クッタ法

$dt = 0.1$ のとき 5 桁目から誤差

$dt = 0.01$ のとき 9 桁目から誤差

$dt = 0.001$ のとき 13 桁目から誤差

$dt = 0.0001$ のとき 17 桁目から誤差

2 - 3 . 丸め誤差

数値計算で、実数を使うときに
生じる丸め誤差について考える。

2 - 3 - 1 実数(浮動小数点数)

実数を指数形式で表現したものを浮動小数点数という。

数値 = 仮数部 × 2^{指数部}

(1) 単精度 : float : (仮数部 8、指数部 23)

(2) 倍精度 : double : (仮数部 11、指数部 52)

2 - 3 - 2 丸め誤差

コンピュータの記憶領域が有限であることにより、多くの10進数の小数は、2進数を使って正確に表現できないことによって生じる誤差のことを丸め誤差という。

ここで、実数（浮動小数点数）を利用したときの丸め誤差は次のようになる。

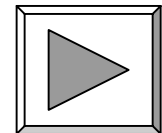
*float*のとき8桁目から誤差

*double*のとき17桁目から誤差

3 . 結果・考察

- 常微分方程式を数値的に解いたときに、実際に結果として表に出てくる誤差は、ルンゲ・クッタ法によって生じた誤差によるものであるか、または丸め誤差が蓄積した結果生じた誤差によるものであるかを見極める。
(N : 分割数, ε : 誤差)

“ 3 - 13 . 考察 ” へ進む



3 - 1 . 常微分方程式 1 (1)

$$\frac{dx}{dt} = t = f(t)$$

4 次のルンゲ・クッタ法

$N = e + 1$ のとき $\varepsilon = e - 4$

$N = e + 2$ のとき $\varepsilon = e - 8$

$N = e + 3$ のとき $\varepsilon = e - 12$

$N = e + 4$ のとき $\varepsilon = e - 16$

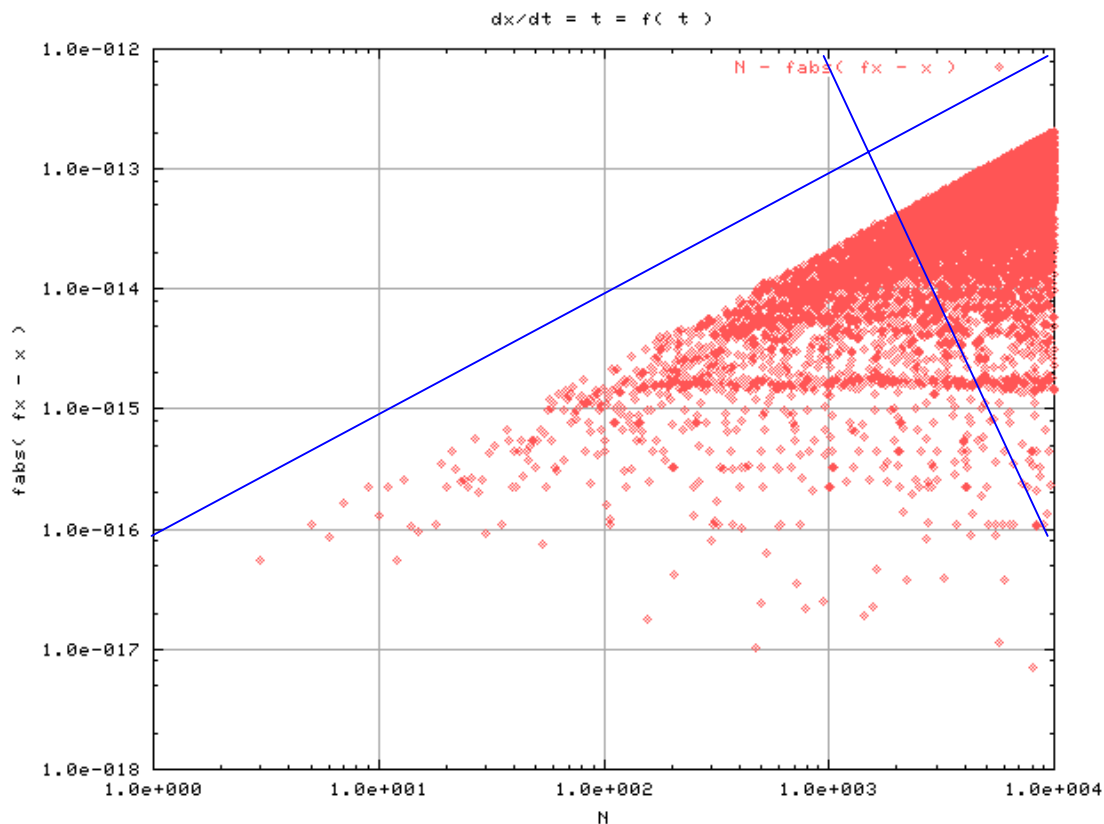
実数 (double)

$N = e + 1$ のとき $\varepsilon = e - 15$

$N = e + 2$ のとき $\varepsilon = e - 14$

$N = e + 3$ のとき $\varepsilon = e - 13$

$N = e + 4$ のとき $\varepsilon = e - 12$



3 - 2 . 常微分方程式 1 (2)

$$\frac{dx}{dt} = t = f(t)$$

4 次のルンゲ・クッタ法

$N = e + 1$ のとき $\varepsilon = e - 4$

$N = e + 2$ のとき $\varepsilon = e - 8$

$N = e + 3$ のとき $\varepsilon = e - 12$

$N = e + 4$ のとき $\varepsilon = e - 16$

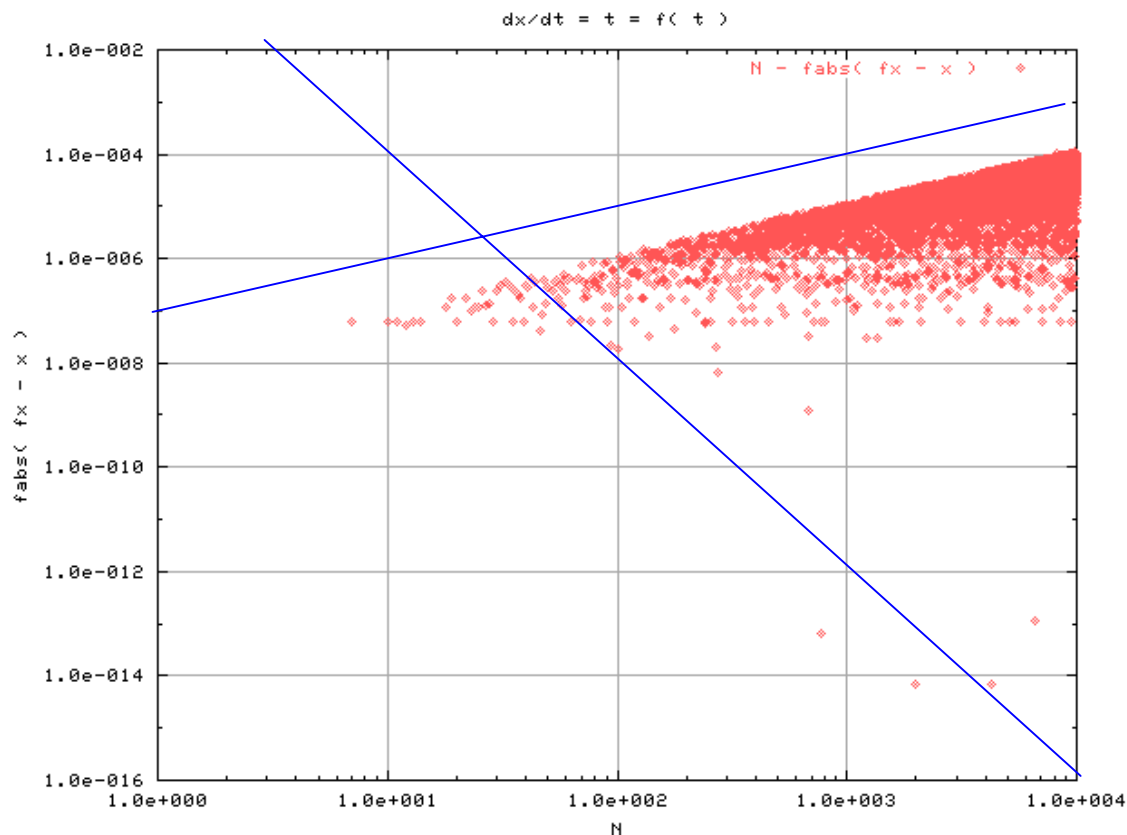
実数 (float)

$N = e + 1$ のとき $\varepsilon = e - 6$

$N = e + 2$ のとき $\varepsilon = e - 5$

$N = e + 3$ のとき $\varepsilon = e - 4$

$N = e + 4$ のとき $\varepsilon = e - 3$



3 - 3 . 常微分方程式 1 (3)

$$\frac{dx}{dt} = t = f(t)$$

2次のルンゲ・クッタ法

$N = e + 1$ のとき $\varepsilon = e - 2$

$N = e + 2$ のとき $\varepsilon = e - 4$

$N = e + 3$ のとき $\varepsilon = e - 6$

$N = e + 4$ のとき $\varepsilon = e - 8$

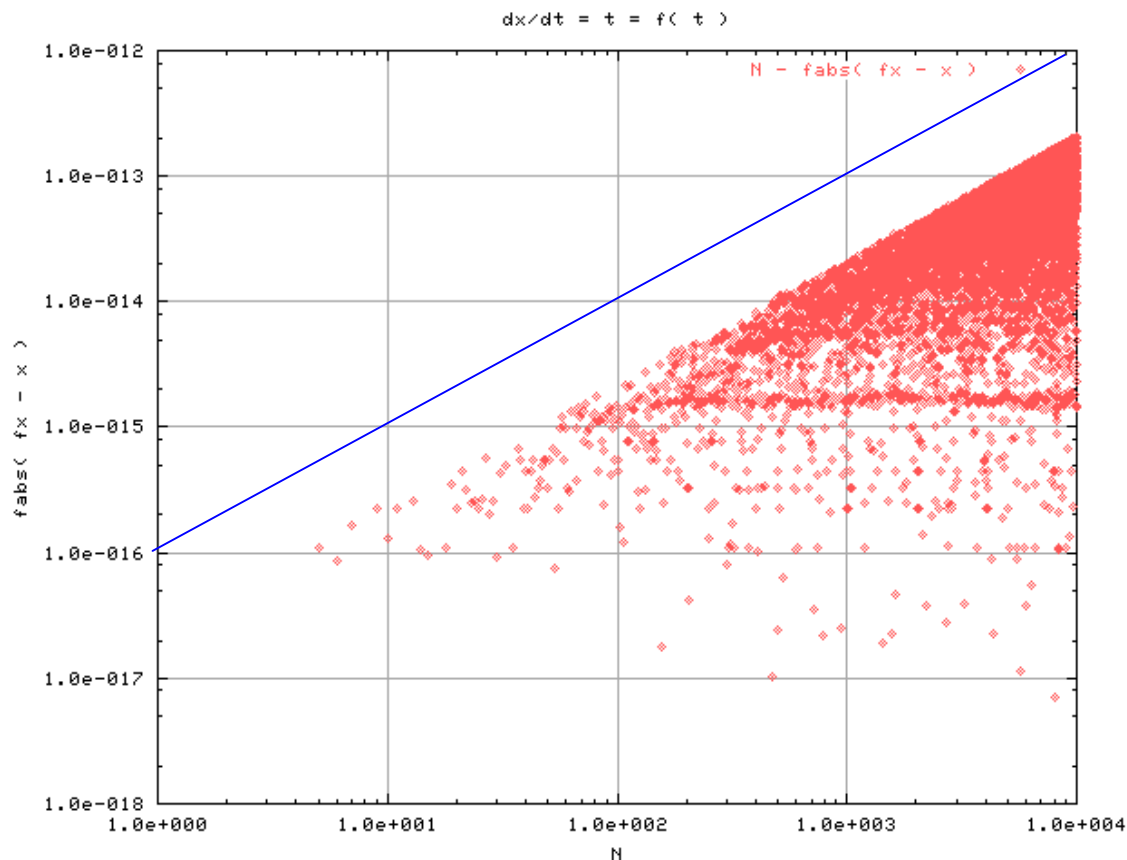
実数 (double)

$N = e + 1$ のとき $\varepsilon = e - 15$

$N = e + 2$ のとき $\varepsilon = e - 14$

$N = e + 3$ のとき $\varepsilon = e - 13$

$N = e + 4$ のとき $\varepsilon = e - 12$



3 - 4 . 常微分方程式 1 (4)

$$\frac{dx}{dt} = t = f(t)$$

2次のルンゲ・クッタ法

$N = e + 1$ のとき $\varepsilon = e - 2$

$N = e + 2$ のとき $\varepsilon = e - 4$

$N = e + 3$ のとき $\varepsilon = e - 6$

$N = e + 4$ のとき $\varepsilon = e - 8$

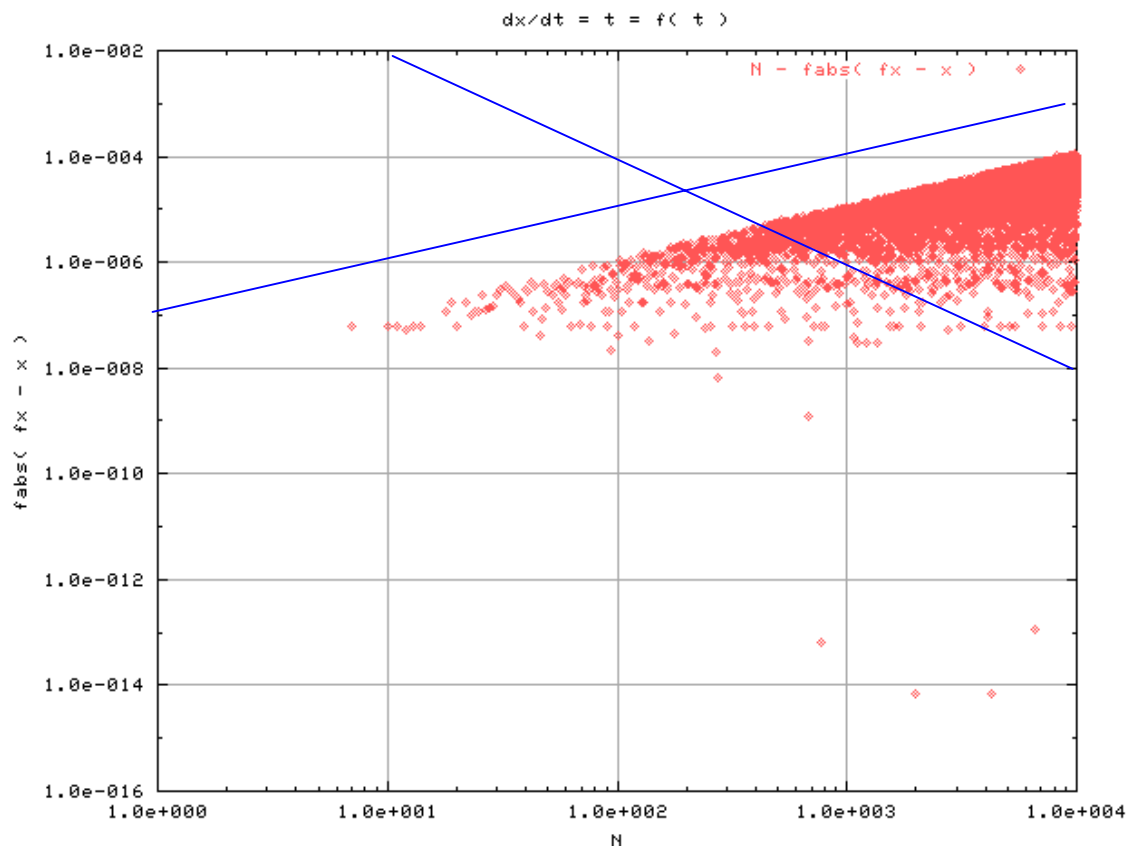
実数 (float)

$N = e + 1$ のとき $\varepsilon = e - 6$

$N = e + 2$ のとき $\varepsilon = e - 5$

$N = e + 3$ のとき $\varepsilon = e - 4$

$N = e + 4$ のとき $\varepsilon = e - 3$



3 - 5 . 常微分方程式 2 (1)

$$\frac{dx}{dt} = x = f(x)$$

4 次のルンゲ・クッタ法

$N = e + 1$ のとき $\varepsilon = e - 4$

$N = e + 2$ のとき $\varepsilon = e - 8$

$N = e + 3$ のとき $\varepsilon = e - 12$

$N = e + 4$ のとき $\varepsilon = e - 16$

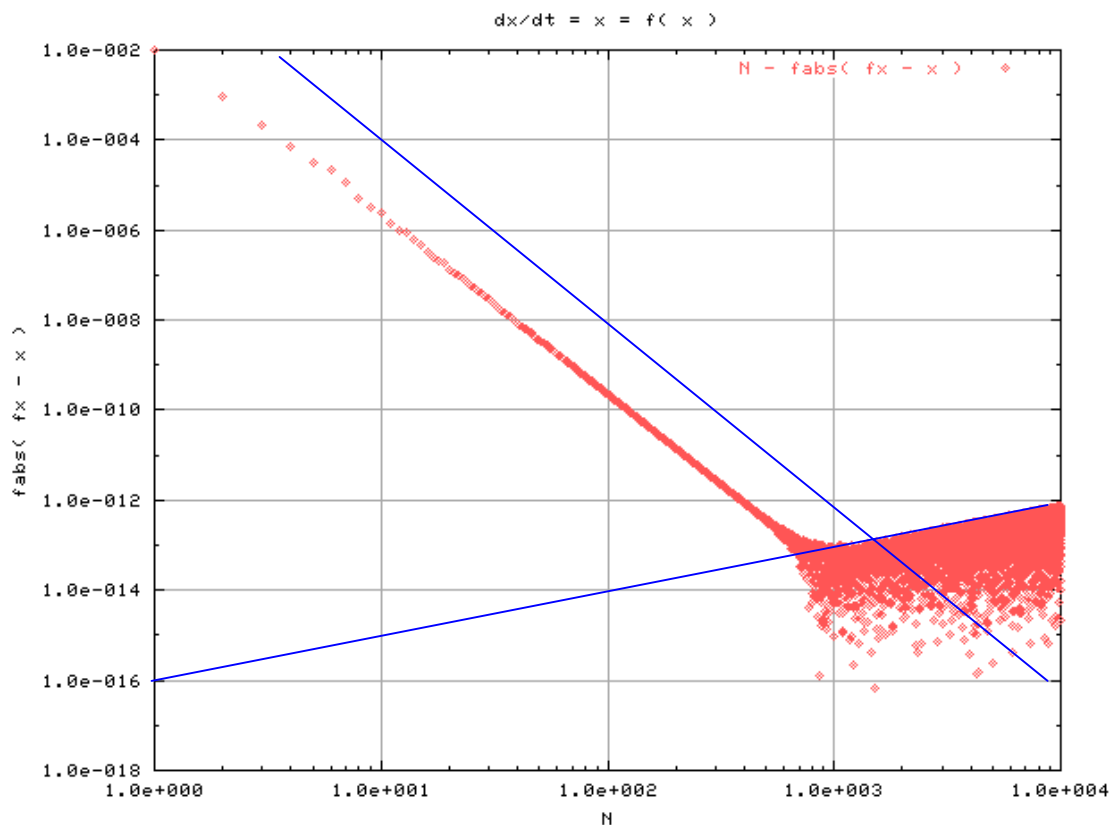
実数 (double)

$N = e + 1$ のとき $\varepsilon = e - 15$

$N = e + 2$ のとき $\varepsilon = e - 14$

$N = e + 3$ のとき $\varepsilon = e - 13$

$N = e + 4$ のとき $\varepsilon = e - 12$



3 - 6 . 常微分方程式 2 (2)

$$\frac{dx}{dt} = x = f(x)$$

4 次のルンゲ・クッタ法

$N = e + 1$ のとき $\varepsilon = e - 4$

$N = e + 2$ のとき $\varepsilon = e - 8$

$N = e + 3$ のとき $\varepsilon = e - 12$

$N = e + 4$ のとき $\varepsilon = e - 16$

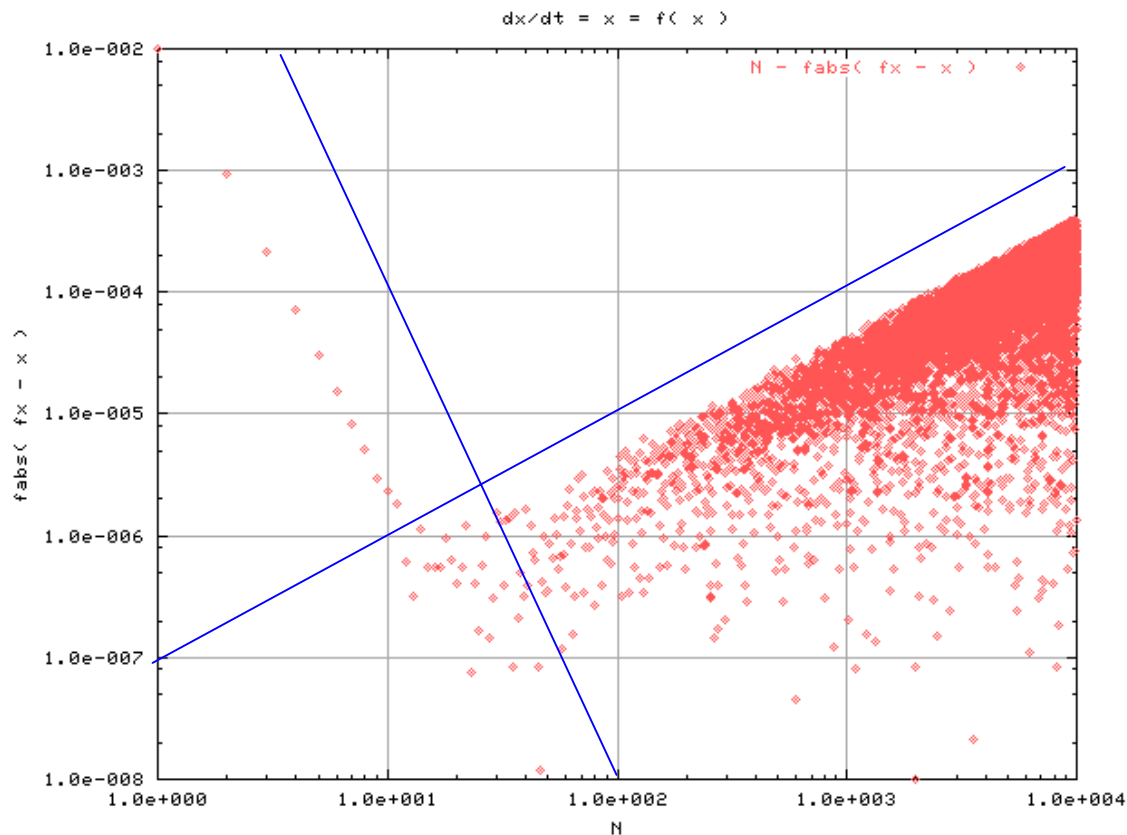
実数 (float)

$N = e + 1$ のとき $\varepsilon = e - 6$

$N = e + 2$ のとき $\varepsilon = e - 5$

$N = e + 3$ のとき $\varepsilon = e - 4$

$N = e + 4$ のとき $\varepsilon = e - 3$



3 - 7 . 常微分方程式 2 (3)

$$\frac{dx}{dt} = x = f(x)$$

2次のルンゲ・クッタ法

$$N = e + 1 \text{ のとき } \varepsilon = e - 2$$

$$N = e + 2 \text{ のとき } \varepsilon = e - 4$$

$$N = e + 3 \text{ のとき } \varepsilon = e - 6$$

$$N = e + 4 \text{ のとき } \varepsilon = e - 8$$

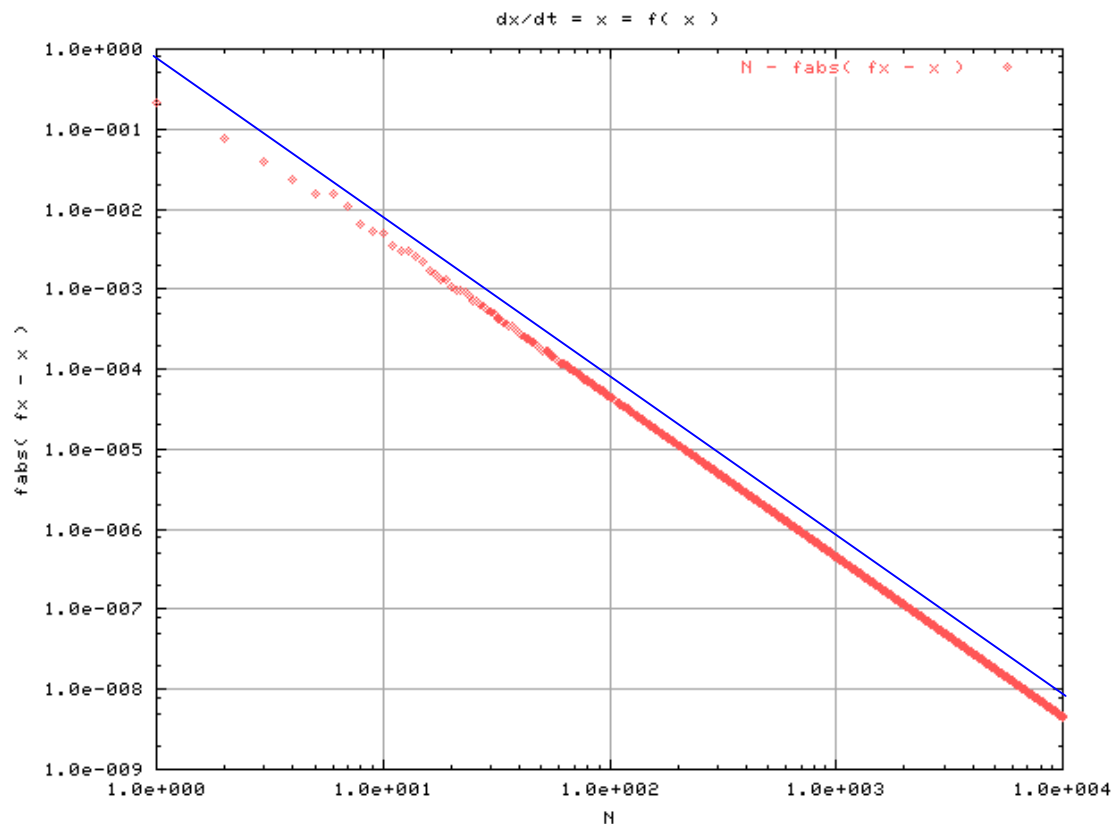
実数 (double)

$$N = e + 1 \text{ のとき } \varepsilon = e - 15$$

$$N = e + 2 \text{ のとき } \varepsilon = e - 14$$

$$N = e + 3 \text{ のとき } \varepsilon = e - 13$$

$$N = e + 4 \text{ のとき } \varepsilon = e - 12$$



3 - 8 . 常微分方程式 2 (4)

$$\frac{dx}{dt} = x = f(x)$$

2次のルンゲ・クッタ法

$N = e + 1$ のとき $\varepsilon = e - 2$

$N = e + 2$ のとき $\varepsilon = e - 4$

$N = e + 3$ のとき $\varepsilon = e - 6$

$N = e + 4$ のとき $\varepsilon = e - 8$

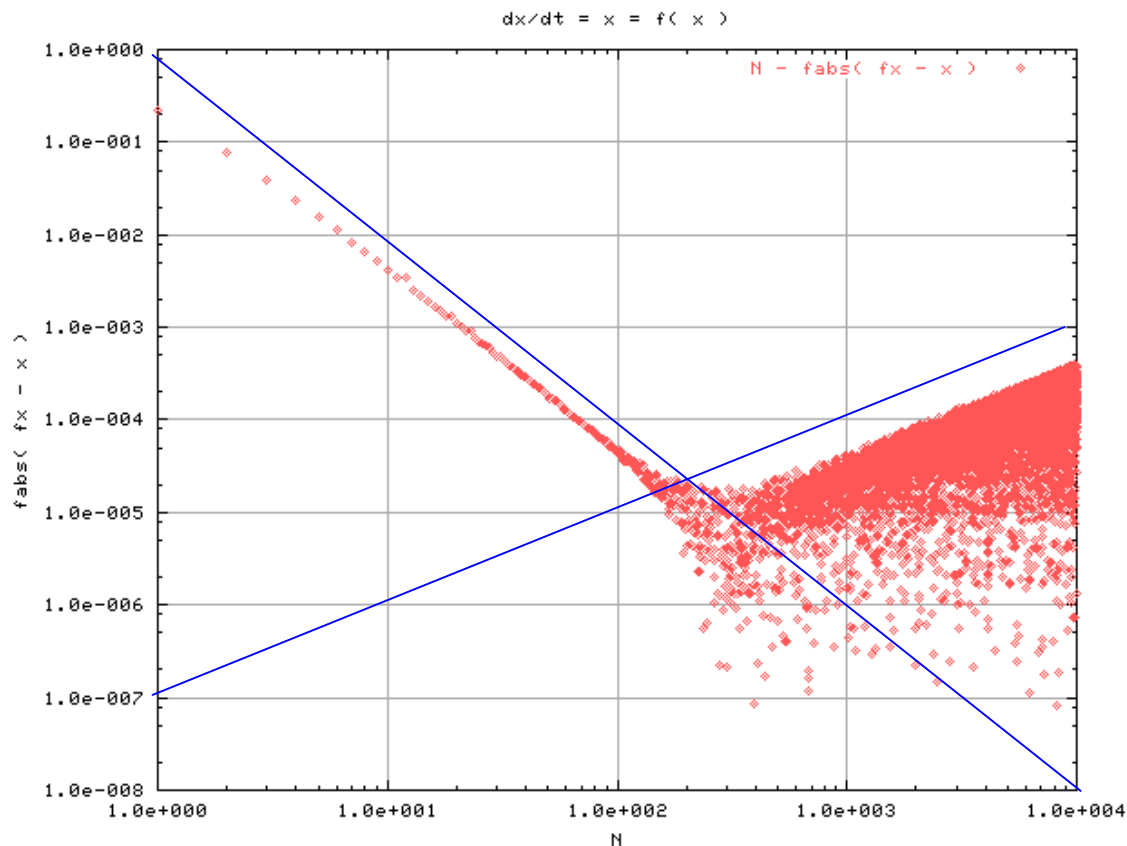
実数 (float)

$N = e + 1$ のとき $\varepsilon = e - 6$

$N = e + 2$ のとき $\varepsilon = e - 5$

$N = e + 3$ のとき $\varepsilon = e - 4$

$N = e + 4$ のとき $\varepsilon = e - 3$



3 - 9 . 常微分方程式 3 (1)

$$\frac{dx}{dt} = t \cdot x = f(t, x)$$

4 次のルンゲ・クッタ法

$N = e + 1$ のとき $\varepsilon = e - 4$

$N = e + 2$ のとき $\varepsilon = e - 8$

$N = e + 3$ のとき $\varepsilon = e - 12$

$N = e + 4$ のとき $\varepsilon = e - 16$

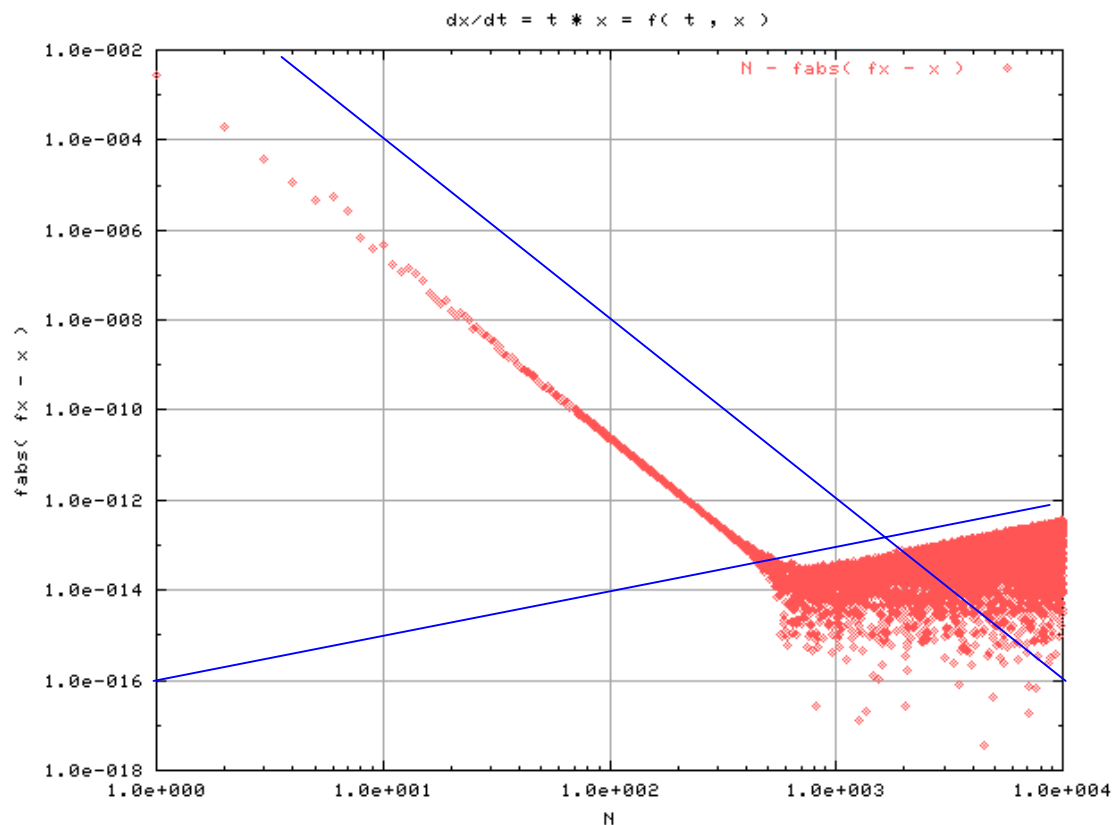
実数 (double)

$N = e + 1$ のとき $\varepsilon = e - 15$

$N = e + 2$ のとき $\varepsilon = e - 14$

$N = e + 3$ のとき $\varepsilon = e - 13$

$N = e + 4$ のとき $\varepsilon = e - 12$



3 - 10 . 常微分方程式3 (2)

$$\frac{dx}{dt} = t \cdot x = f(t, x)$$

4次のルンゲ・クッタ法

$N = e + 1$ のとき $\varepsilon = e - 4$

$N = e + 2$ のとき $\varepsilon = e - 8$

$N = e + 3$ のとき $\varepsilon = e - 12$

$N = e + 4$ のとき $\varepsilon = e - 16$

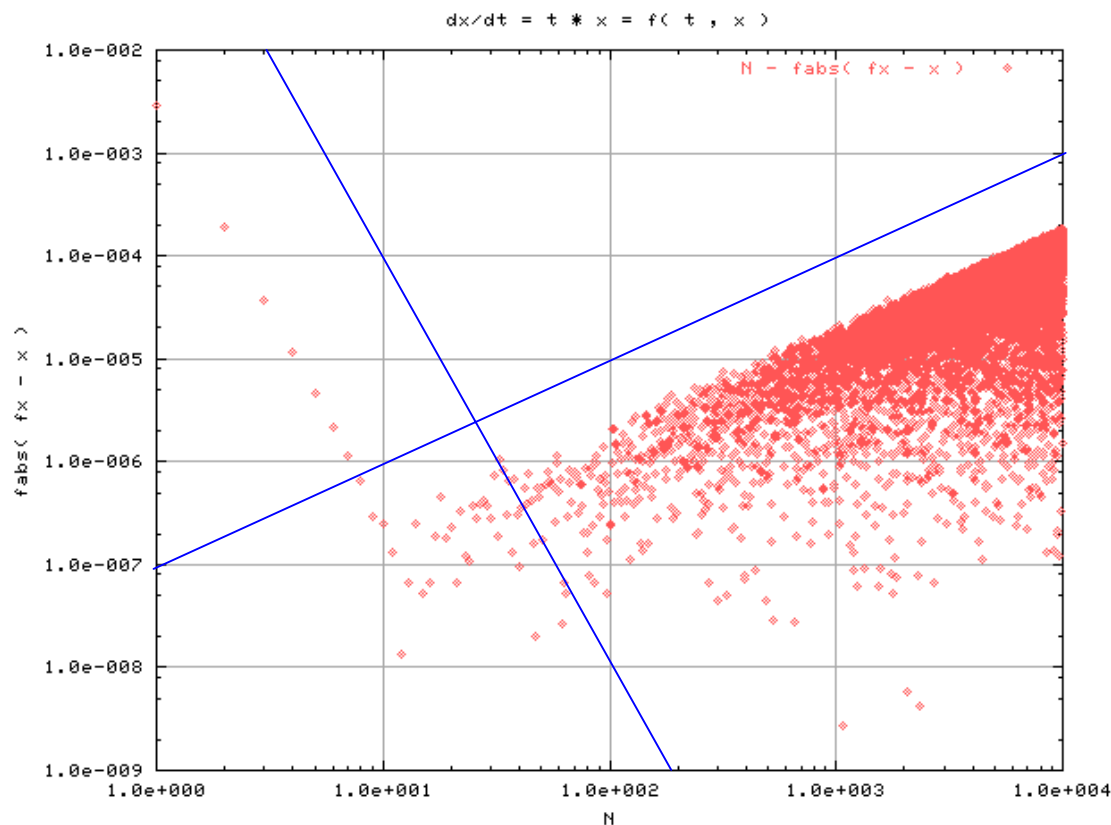
実数 (float)

$N = e + 1$ のとき $\varepsilon = e - 6$

$N = e + 2$ のとき $\varepsilon = e - 5$

$N = e + 3$ のとき $\varepsilon = e - 4$

$N = e + 4$ のとき $\varepsilon = e - 3$



3 - 1 1 . 常微分方程式 3 (3)

$$\frac{dx}{dt} = t \cdot x = f(t, x)$$

2次のルンゲ・クッタ法

$$N = e + 1 \text{ のとき } \quad \varepsilon = e - 2$$

$N = e + 2$ のとき $\varepsilon = e - 4$

$$N = e + 3 \text{ のとき } \quad \varepsilon = e - 6$$

$$N = e + 4 \text{ のとき } \quad \varepsilon = e - 8$$

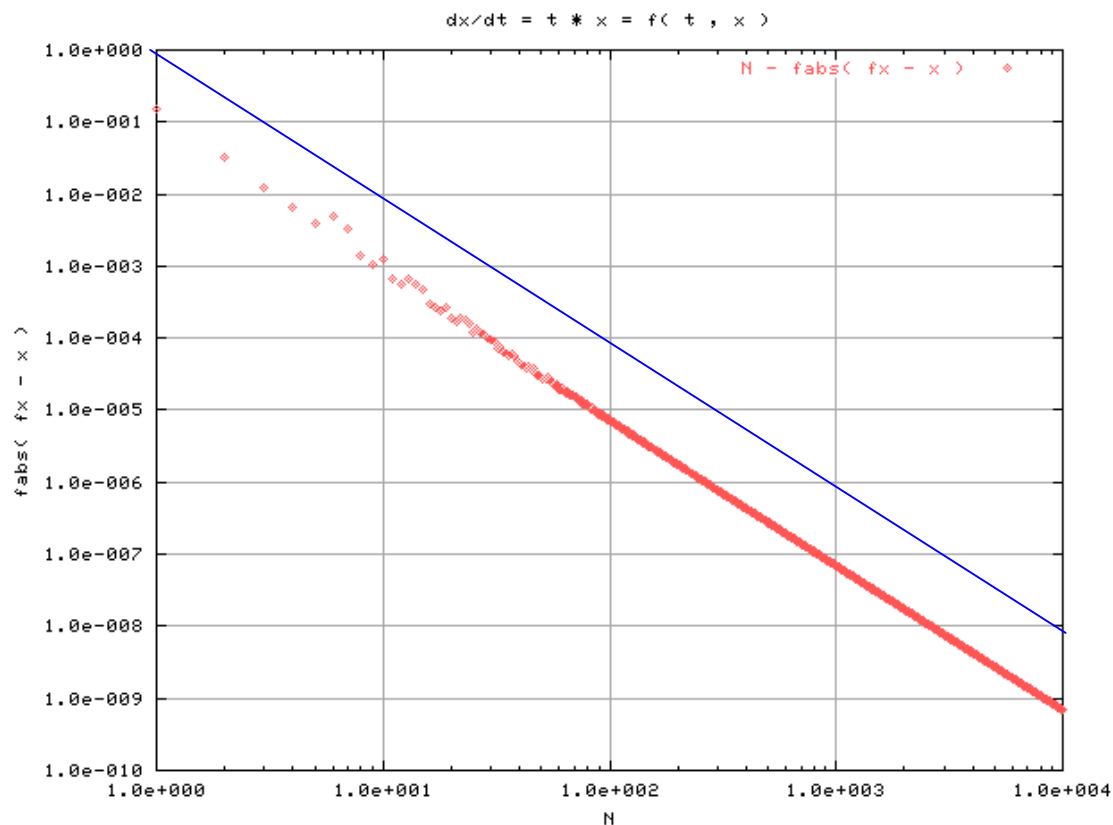
実数 (double)

$N = e + 1$ のとき $\varepsilon = e - 15$

$$N = e + 2 \text{ のとき } \quad \varepsilon = e - 14$$

$N = e + 3$ のとき $\varepsilon = e - 13$

$$N = e + 4 \text{ のとき } \quad \varepsilon = e - 12$$



3 - 1 2 . 常微分方程式 3 (4)

$$\frac{dx}{dt} = t \cdot x = f(t, x)$$

2次のルンゲ・クッタ法

$$N = e + 1 \text{ のとき } \varepsilon = e - 2$$

$$N = e + 2 \text{ のとき } \varepsilon = e - 4$$

$$N = e + 3 \text{ のとき } \varepsilon = e - 6$$

$$N = e + 4 \text{ のとき } \varepsilon = e - 8$$

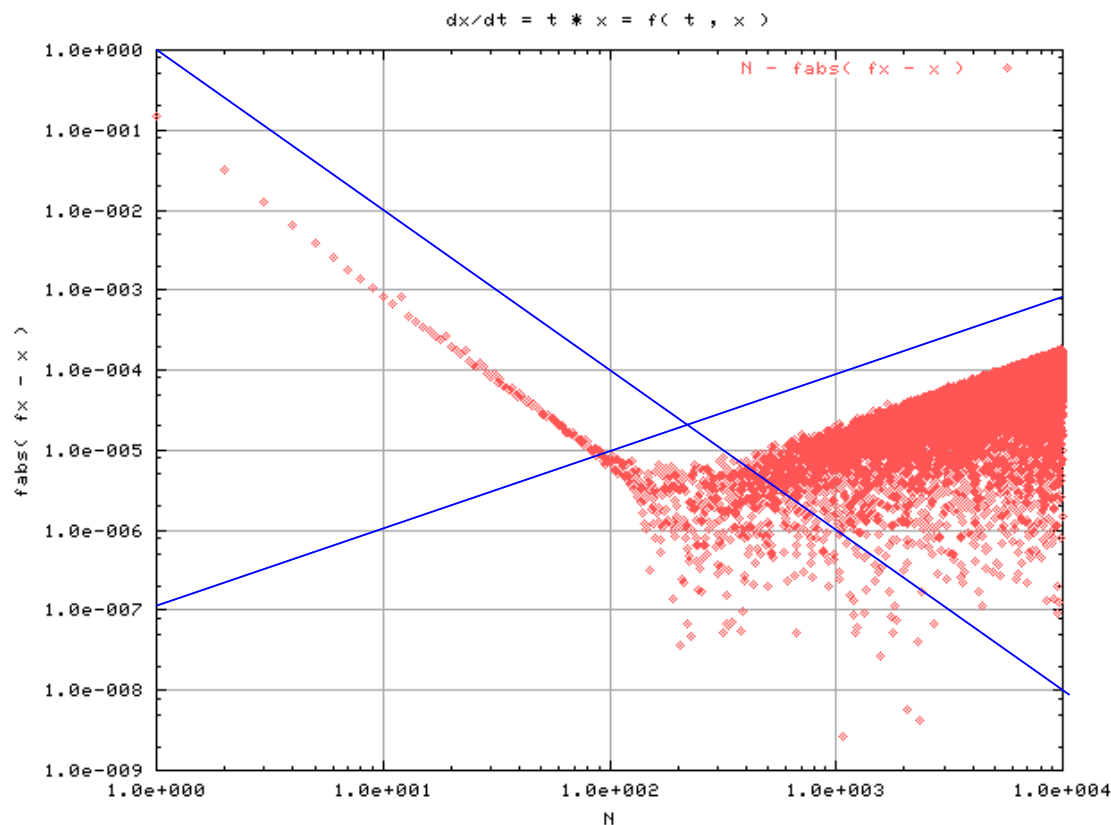
実数 (float)

$$N = e + 1 \text{ のとき } \varepsilon = e - 6$$

$$N = e + 2 \text{ のとき } \varepsilon = e - 5$$

$$N = e + 3 \text{ のとき } \varepsilon = e - 4$$

$$N = e + 4 \text{ のとき } \varepsilon = e - 3$$



3 - 13 . 考察

常微分方程式1では、ルンゲ・クッタ法による数値計算の精度がとてもしっかりしたために、丸め誤差が蓄積した結果生じる誤差だけが結果として表に出てくる。

常微分方程式2・3では、分割数を大きくすることによって、ルンゲ・クッタ法による誤差が小さくなっていき、それに反して丸め誤差が蓄積した結果生じる誤差が大きくなっていることがわかる。

[“3 . 結果・考察”へ戻る](#)

