目標

ニュートンの運動方程式は、座標系の平行移動、回転、反転、および、時間の平行移動、反転に対して不変である事を示す。

↓

それぞれの不変性は、空間が均質、等方、対称であること、および、時間が一様、対称であることを意味する。

↓

空間の均質性、等方性から運動量保存、角運動量保存則、時間の一様性から工ネルギー保存の法則を導く。

§1. 不変性と対称性

ある座標系から見て、ニュートンの運動方程式：

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x$$
$$m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y \qquad (1.1)$$
$$m\frac{d^2z}{dt^2} = F_z$$

が成り立っているとする。

(1) 平行移動に対する不変性と空間の均質性

座標軸の方向・向きは同じで、原点の位置だけが異なる二つの座標系の変換、つまり、平行移動した座標系を考える。(1.1)式を平行移動した座標系でも、同じ形の運動方程式が成り立つ事を示す。

平行移動した新しい座標系を(x_0, y_0, z_0)とする。任意の点を、もとの座標系から見た座標を(x, y, z)、および新しい座標系から見た座標を(x', y', z')とする。それらの間には図１から明らかなように、次の座標変換が成り立つ：

$$x' = x - x_0$$
$$y' = y - y_0 \qquad (1.2)$$
$$z' = z - z_0$$

これを二階微分すると、

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}$$
$$\frac{d^2y'}{dt^2} = \frac{d^2y}{dt^2} \qquad (1.3)$$
$$\frac{d^2z'}{dt^2} = \frac{d^2z}{dt^2}$$

となる。また、平行移動した座標系から見ても、力が距離の関数の場合、力の成分は変わらないので、次式が成り立つ、

$$F_x' = F_x$$
$$F_y' = F_y \qquad (1.4)$$
$$F_z' = F_z$$

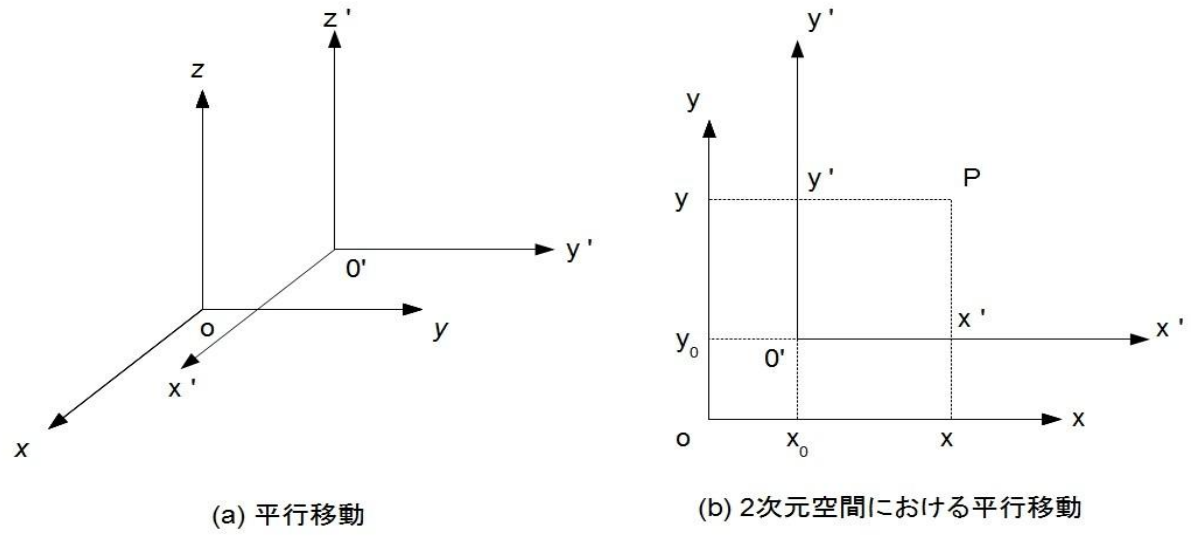
したがって(1.1)、(1.3)、(1.4)式より

$$m\frac{d^2x'}{dt^2} = F_x'$$
$$m\frac{d^2y'}{dt^2} = F_y' \qquad (1.5)$$
$$m\frac{d^2z'}{dt^2} = F_z'$$

が導かれ、平行移動した座標系から見ても、同じ形ニュートンの運動方程式が成り立つ。これを**ニュートンの運動方程式**は**平行移動**に対して**不変**であるという。

つまり、座標系の原点を空間のどこにとっても、同じようにニュートンの運動の原理（法則）が成り立つのであるから、空間のすべての点が運動の原理に関して同等であることになる。すなわち、

空間は運動の原理に関して**均質**である。



(a) 平行移動　　(b) 2次元空間における平行移動

図 1　平行移動

(2) 回転に対する不変性と空間の等方性

ある座標系から見て(1.1)式が成り立っているとき、それを回転した座標系から見ても、同じ形の運動方程式が成り立つか示す。

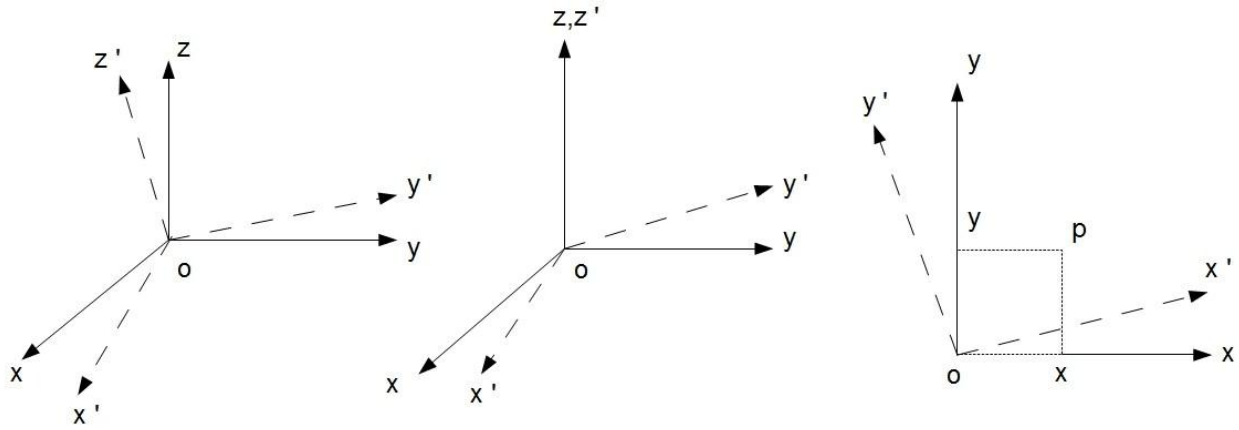


図 2 回転

座標系の原点は同じで z 軸まわりに角αの回転は、図 2 より次のように変換される：

$$x' = xcos\alpha + ysin\alpha$$
$$y' = -sin\alpha + ycos\alpha \qquad (1.6)$$
$$z' = z$$

また、回転した座標系から見た力の成分も、力が距離の関数である場合、距離そのものが回転に対して不変であるから、次式が成り立つ、

$$F_x' = F_x cos\alpha + F_y sin\alpha$$
$$F_y' = -F_x sin\alpha + F_y cos\alpha \qquad (1.7)$$
$$F_z' = F_z$$

したがって、(1.1)、(1.6)、(1.7)式より

$$m\frac{d^2x'}{dt^2} = F_x'$$
$$m\frac{d^2y'}{dt^2} = F_y' \qquad (1.8)$$
$$m\frac{d^2z'}{dt^2} = F_z'$$

が導かれ、回転した座標系から見ても、同じ形のニュートンの運動方程式が成り立っていることがわかる。これを、**ニュートンの運動方程式**は**回転**に対して**不変**であるという。

つまり座標軸を空間のどの方向にとっても、同じようにニュートンの運動の原理がなりたつのであるから、空間のすべての方向が運動の原理に対して同等である。すなわち、

空間は運動の原理に関して**等方的**である。

(3) 反転に対する不変性と空間の対称性

(1.1)式を反転した座標系でも、同じ形の運動方程式が成り立つか示す。

座標系の反転は、次のように変換される：

$$x' = -x$$
$$y' = -y \qquad (1.9)$$
$$z' = -z$$

また、座標系の反転に対しても、力が距離の関数である場合、距離そのものは反転に対して不変であるので、反転した座標系から見た力の成分は次のようになる、

$$F_x' = -F_x$$
$$F_y' = -F_y \qquad (1.10)$$
$$F_z' = -F_z$$

したがって、(1.1)、(1.9)、(1.10)式より、

$$m\frac{d^2x'}{dt^2} = F_x'$$
$$m\frac{d^2y'}{dt^2} = F_y' \qquad (1.11)$$
$$m\frac{d^2z'}{dt^2} = F_z'$$

が導かれ、反転した座標系から見ても、やはり同じ形のニュートンの運動方程式が成り立つことがわかる。これを、**ニュートンの運動方程式**は**反転**に対してして**不変**であるという。

つまり、座標軸の正の向きを空間のどちらの向きにとっても、同じようにニュートンの運動の原理が成り立つのであるから、空間のどちらの向きにも運動の原理に関して同等であることになる。すなわち、**空間**は運動の原理に関して**対称**である。

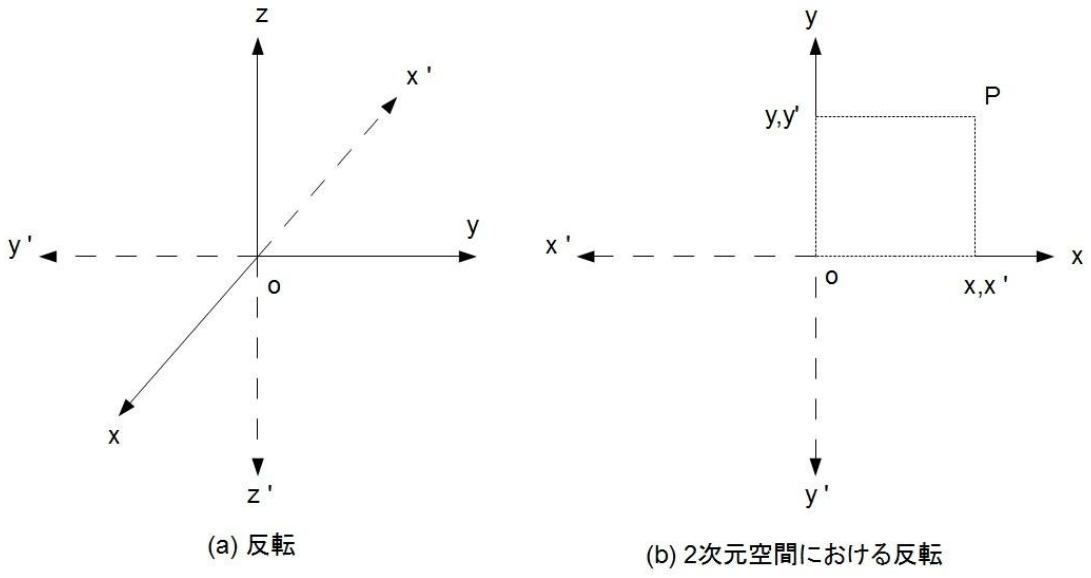


図 3 反転

(4) 時間の平行移動に対する不変性と時間の一様性

時間の原点をずらしたとき、つまり、時間の平行移動を行ったとき、ニュートンの運動方程式は同じように成り立つか示す。

時間の平行移動は単純に：

$$t' = t - t_0 \tag{1.12}$$

で与えられる。

(1.12)式より、時間についての微分は

$$\frac{d}{dt'} = \frac{dt}{dt'}\frac{d}{dt}$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{dt} \tag{1.13}$$

$$\frac{d^2}{dt'^2} = \frac{d^2}{dt^2}$$

となり、速度 $d\boldsymbol{r}/dt$ や加速度 $d^2\boldsymbol{r}/dt^2$ は時間の平行移動によっても変わらない。また、力も、ほとんどの場合、時間には陽には依存しない場合が多い。

したがって、時間を平行移動しても、やはり同じ形の運動方程式：

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt'^2} = \boldsymbol{F} \tag{1.14}$$

が成り立つ。これを、**ニュートンの運動方程式**は**時間の平行移動**に対して**不変**であるという。

つまり、時間の原点をどの時刻にとっても、同じようにニュートンの運動の原理が成り立つのであるから、時間のすべての時刻が運動の原理に関して同等であることになる。すなわち、

時間は運動の原理に関して**一様**である。

(5) 時間反転に対する不変性と時間の対称性

時間の流れの向きを変えたとき、つまり、時間を反転させたとき、ニュートンの運動方程式は同じように成り立つか示す。

時間反転は

$$t' = -t \tag{1.15}$$

で与えられる。

(1.15)式より、時間についての微分は

$$\frac{d}{dt'} = \frac{dt}{dt'}\frac{d}{dt}$$

$$= -\frac{\mathrm{d}}{dt} \tag{1.16}$$

$$\frac{d^2}{dt'^2} = \frac{d^2}{dt^2}$$

となり、加速度 $d^2\boldsymbol{r}/dt^2$ は時間反転によっても変わらない。また、力も、ほとんどの場合、時間には陽には依存しない。

したがって、時間を反転しても、やはり同じ形の運動方程式：

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt'^2}=\boldsymbol{F} \tag{1.17}$$

が成り立つ。これを、**ニュートンの運動方程式**は**時間反転**に対して**不変**であるという。

つまり、時間の流れの向きをどちらにとっても、同じようにニュートンの運動の原理が成り立つのであるから、時間の流れのどちらの向きも運動の原理に関して同等であることになる。すなわち、

時間は運動の原理に関して**対称**である。

§2. 対称性と保存法則

(1) 運動の原理の積分表現

対称性と保存法則との関係を求める前に、運動の原理を、ニュートンの運動方程式のような微分による表現ではなく、積分による表現を導く。

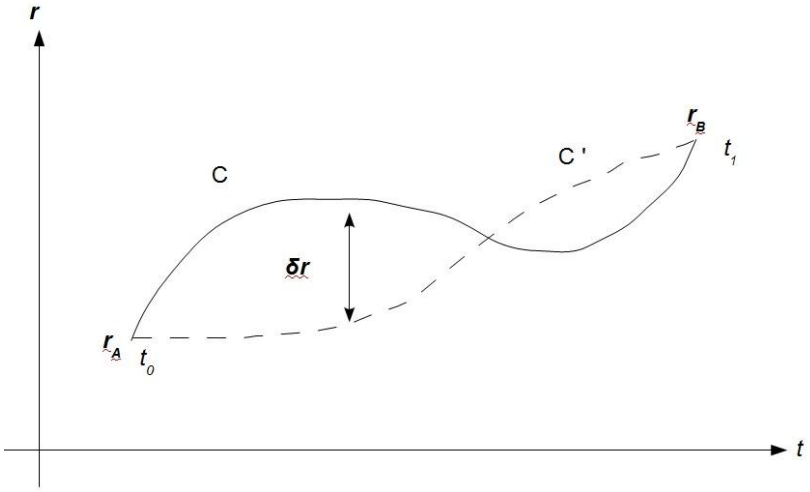


図 4　ハミルトンの原理

いま、時刻 t_0 に位置 $\boldsymbol{r_A}$ にあった物体が、保存力の作用の下に、道筋 C を通って、時刻 t_1 に位置 $\boldsymbol{r_B}$ に達したとする（図 4）。点 $\boldsymbol{r_A}$ から点 $\boldsymbol{r_B}$ へゆく道筋はいろいろ引けるが、物体がニュートンの運動方程式に従ってたどる道筋は、ただ一つしかないはずである。この実現される道筋は、次の仮説に基づいて決定することができる。

2 点間の運動は、線積分

$$I=\int_{t_0}^{t_1}L(\boldsymbol{r}(t),\dot{\boldsymbol{r}}(t))dt \tag{2.1}$$

$$L(\boldsymbol{r}(t),\dot{\boldsymbol{r}}(t))=\frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^{\boldsymbol{2}}(t)-U(\boldsymbol{r}(t)) \tag{2.2}$$

が極値をとるような道筋に沿って実現される。これを**ハミルトンの原理**（**最小作用の原理**）という。

ここに(2.2)式で、運動エネルギーと位置エネルギーの差として与えられる、位置 $\boldsymbol{r}$ と速度 $\dot{\boldsymbol{r}}$ との関数 L は、**ラグラジアン**、あるいは、**ラグランジュ関数**と呼ばれ、(2.1)式で与えられる線積分 I は**作用積分**と呼

ばれている。

このハミルトンの原理は、ニュートンの運動方程式と同等であって、一方から他方を導くことができる。ここでは、ハミルトンの原理からニュートンの運動方程式を導いてみる。

実現される道筋 C に沿う積分 I と、その近くの道筋 C' に沿う積分 I' との差 $\delta I = I' - I$ は、I が極値をとることから、0 でなければならない。そこで、時刻 t における、道筋 C 上の位置 $\boldsymbol{r}(t)$ を、C'上の位置を$\boldsymbol{r}'(t) = \boldsymbol{r}(t) + \delta\boldsymbol{r}(t)$とすれば、

$$\begin{aligned}\delta I &= \int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}'^{\boldsymbol{2}} - U(\boldsymbol{r}')\right]dt - \int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^{\boldsymbol{2}} - U(\boldsymbol{r})\right]dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{1}{2}m(\dot{\boldsymbol{r}}'^{\boldsymbol{2}} - \dot{\boldsymbol{r}}^{\boldsymbol{2}}) - \{U(\boldsymbol{r}') - U(\boldsymbol{r})\}\right]dt\end{aligned} \tag{2.3}$$

(2.3)式の変形を第 1 項・運動エネルギーと第 2 項・ポテンシャルに分けてそれぞれ考えてみよう。

第 1 項・運動エネルギーについて：

$$\int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{1}{2}m\{\boldsymbol{r}(t) + \delta\boldsymbol{r}(t)\}^2\right]dt = \int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{1}{2}m(\dot{\boldsymbol{r}}^{\boldsymbol{2}} + 2\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\delta\dot{\boldsymbol{r}} + \delta\dot{\boldsymbol{r}}^{\boldsymbol{2}})\right]dt \tag{2.4}$$

と変形できる。よって、(2.3)式の第 1 項は 2 次以上の微小量を無視すれば

$$\int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{1}{2}m(\dot{\boldsymbol{r}}'^{\boldsymbol{2}} - \dot{\boldsymbol{r}}^{\boldsymbol{2}})\right]dt = \int_{t_0}^{t_1}[m\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\delta\dot{\boldsymbol{r}}]\,dt \tag{2.5}$$

となる。

第 2 項・ポテンシャルについて：$\mathrm{U}(\boldsymbol{r}') = \mathrm{U}\{\boldsymbol{r}(t) + \delta\boldsymbol{r}(t)\}$をテイラー展開すると

$$U(\boldsymbol{r} + \delta\boldsymbol{r}) = U(\boldsymbol{r}) + \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}}\cdot\delta\boldsymbol{r} + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 U}{\partial \boldsymbol{r}^{\boldsymbol{2}}}\cdot\delta\boldsymbol{r}^{\boldsymbol{2}} + \cdots \tag{2.6}$$

となる。二次以上の微小量をむしすれば、(2.3)式の第 2 項は

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t_1}[\{U(\boldsymbol{r}') - U(\boldsymbol{r})\}]\,dt &= \int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}}\cdot\delta\boldsymbol{r}\right]dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1}[\boldsymbol{\nabla}U(\boldsymbol{r})\cdot\delta\boldsymbol{r}]dt\end{aligned} \tag{2.7}$$

したがって、(2.5)、(2.7)式より(2.3)式は

$$\delta I = \int_{t_0}^{t_1}[m\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\delta\dot{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{\nabla}U(\boldsymbol{r})\cdot\delta\boldsymbol{r}]\,dt \tag{2.8}$$

となる。

ここで

$$\begin{aligned}\delta\dot{\boldsymbol{r}} &= \dot{\boldsymbol{r}}' - \dot{\boldsymbol{r}} \\ &= \frac{d\boldsymbol{r}'}{dt} - \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \\ &= \frac{d}{dt}(\dot{\boldsymbol{r}}' - \boldsymbol{r}) \\ \therefore\ \delta\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} &= \frac{d}{dt}(\delta\boldsymbol{r})\end{aligned} \tag{2.9}$$

と$\delta\boldsymbol{r}(t_1) = \delta\boldsymbol{r}(t_0) = 0$ を考慮して、(2.8)式の第 1 項を部分積分すると

$$\int_{t_0}^{t_1}\left[m\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\frac{d}{dt}(\delta\boldsymbol{r})\right]dt = [m\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\delta\boldsymbol{r}]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1}[m\ddot{\boldsymbol{r}}\cdot\delta\boldsymbol{r}]\,dt$$
$$= -\int_{t_0}^{t_1}[m\ddot{\boldsymbol{r}}\cdot\delta\boldsymbol{r}]\,dt \qquad (2.10)$$

よって、(2.8)式は

$$\delta I = -\int_{t_0}^{t_1}[m\ddot{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{\nabla}U(\boldsymbol{r})]\delta\boldsymbol{r}\,dt = 0 \qquad (2.11)$$

となり、$\delta I = 0$ となるためには、$\delta\boldsymbol{r}$ は任意であるか、

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = -\boldsymbol{\nabla}U(\boldsymbol{r}) \qquad (2.12)$$

が成り立たなければならない。これはニュートンの運動方程式である。

(2) 空間の均質性と運動量保存の法則、時間の一様性とエネルギー保存の法則

空間の均質性から運動量保存の法則が、時間の一様性からエネルギー保存の法則が導かれることを示す。

いま、時刻t_0 に、位置 $\boldsymbol{r_{1A}}, \boldsymbol{r_{2A}}$ にあった質量 m_1, m_2 の 2 物体が、距離に依存する力によって相互作用しながら、それぞれ、道筋C_1, C_2を通って、時刻t_1 に、位置 $\boldsymbol{r_{1B}}, \boldsymbol{r_{2B}}$ に達したとする。また、出発点、到達点をともに$\Delta\boldsymbol{r}$ ずらし、出発時刻、到達時刻もΔt 遅らせて、まえと同じ条件の下に行われた運動の道筋をC_1', C_2'であるとする（図 5）。

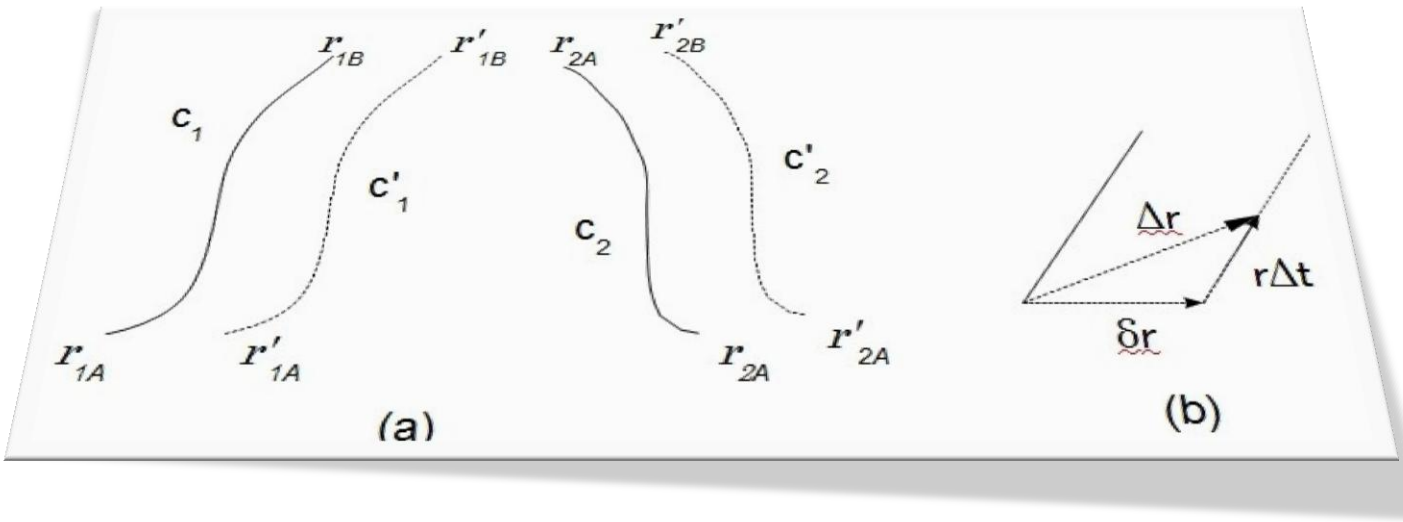


図 5 運動量保存の法則、エネルギー保存の法則

これらの道筋 C_1, C_2 ; C_1', C_2' にそった作用積分I, I'は極値をとる。そして、これらの二つの運動は、たがいに、**時間的に、空間的にズレているだけだから、時間が一様であり、空間が均質であれば、作用積分 I と I'との値は等しくなければならない。**

すなわち、

$$\begin{aligned} \Delta I &= I' - I \\ &= \int_{t_0'}^{t_1'} \left[\frac{1}{2} m_1 \dot{\boldsymbol{r}}_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\boldsymbol{r}}_2'^2 - U(|\boldsymbol{r}_1' - \boldsymbol{r}_2'|)\right] dt \\ &\quad - \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{1}{2} m_1 \dot{\boldsymbol{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\boldsymbol{r}}_2^2 - U(|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|)\right] dt = 0 \end{aligned} \tag{2.13}$$

$\Delta t = t_0' - t_0 = t_1' - t_1$ は充分小さいから、

$$\begin{aligned} \Delta I = &\int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{1}{2} m_1 \dot{\boldsymbol{r}}_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\boldsymbol{r}}_2'^2 - U(|\boldsymbol{r}_1' - \boldsymbol{r}_2'|)\right] \mathrm{dt} \\ &+ \left[\frac{1}{2} m_1 \dot{\boldsymbol{r}}_{1B}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\boldsymbol{r}}_{2B}^2 - U(|\boldsymbol{r}_{1B} - \boldsymbol{r}_{2B}|)\right] \Delta t \\ &- \left[\frac{1}{2} m_1 \dot{\boldsymbol{r}}_{1A}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\boldsymbol{r}}_{2A}^2 - U(|\boldsymbol{r}_{1A} - \boldsymbol{r}_{2A}|)\right] \Delta t \\ &- \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{1}{2} m_1 \dot{\boldsymbol{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\boldsymbol{r}}_2^2 - U(|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|)\right] dt \end{aligned} \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned} \Delta I = &\left[\frac{1}{2} m_1 \dot{\boldsymbol{r}}_{1B}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\boldsymbol{r}}_{2B}^2 - U(|\boldsymbol{r}_{1B} - \boldsymbol{r}_{2B}|)\right] \Delta t - \left[\frac{1}{2} m_1 \dot{\boldsymbol{r}}_{1A}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\boldsymbol{r}}_{2A}^2 - U(|\boldsymbol{r}_{1A} - \boldsymbol{r}_{2A}|)\right] \Delta t \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{1}{2} m_1 \left(\dot{\boldsymbol{r}}_1'^2 - \dot{\boldsymbol{r}}_1^2\right) + \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{\boldsymbol{r}}_2'^2 - \dot{\boldsymbol{r}}_2^2\right) - \{U(|\boldsymbol{r}_1' - \boldsymbol{r}_2'|) - U(|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|)\}\right] dt \end{aligned} \tag{2.15}$$

※(2.13)式から(2.15)式への式変形の補足

(2.13)式の第一項を

$$\int_{t_0'}^{t_1'} \left[\frac{1}{2} m_1 \dot{\boldsymbol{r}}_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\boldsymbol{r}}_2'^2 - U(|\boldsymbol{r}_1' - \boldsymbol{r}_2'|)\right] dt = \int_{t_0'}^{t_1'} f(t) dt \tag{2.16}$$

とする。 $\Delta t \ll 1$ のとき(2.16)式は次のようになる、

$$\begin{cases} \Delta t = t_0' - t_0 \\ \Delta t = t_1' - t_1 \end{cases}$$
$$\int_{t_0'}^{t_1'} f(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} f(t) dt + f(t_1)\,\Delta t - f(t_0)\Delta t \tag{2.17}$$

これは、$y = f(t)$の区間 $t_0' \le t \le t_1'$ での面積は、$y = f(t)$の区間 $t_0 \le t \le t_1$ での面積に、微小幅の短冊の面積を $f(t_1)\Delta t$ 加えて、微小幅の短冊の面積 $f(t_0)\Delta t$ を引いたものに等しくなることから導かれる（図 6）。

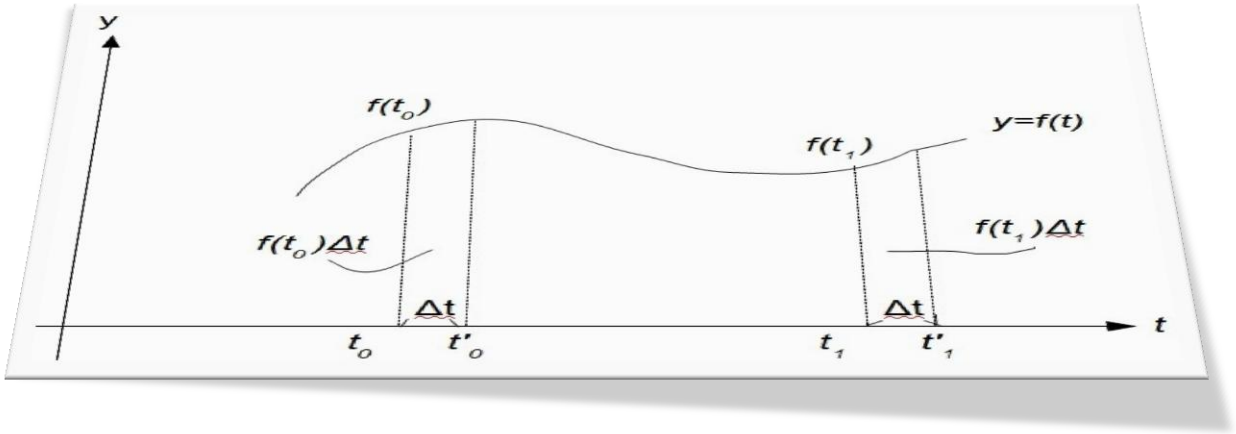


図 6　積分の近似

本題に戻ると、

時刻 t における、道筋 C_1, C_2 と C_1', C_2' 上の位置の差を $\delta\boldsymbol{r_1}(t)=\boldsymbol{r_1'}(t)-\boldsymbol{r_1}(t)$, $\delta\boldsymbol{r_2}(t)=\boldsymbol{r_2'}(t)-\boldsymbol{r_2}(t)$ とすれば、(2.15)式の第 3 項の積分は、2 次以上の微小量を無視して、

$$\int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{1}{2}m_1\left(\dot{\boldsymbol{r}}_1'^2-\dot{\boldsymbol{r}}_1^2\right)+\frac{1}{2}m_2\left(\dot{\boldsymbol{r}}_2'^2-\dot{\boldsymbol{r}}_2^2\right)-\{U(|\boldsymbol{r_1'}-\boldsymbol{r_2'}|)-U(|\boldsymbol{r_1}-\boldsymbol{r_2}|)\}\right]dt$$
$$=\int_{t_0}^{t_1}[m_1\dot{\boldsymbol{r}}_1\cdot\delta\dot{\boldsymbol{r}}_1+m_2\dot{\boldsymbol{r}}_2\cdot\delta\dot{\boldsymbol{r}}_2+\boldsymbol{\nabla_1}U\cdot\delta\boldsymbol{r_1}+\boldsymbol{\nabla_2}U\cdot\delta\boldsymbol{r_2}]\,dt \tag{2.18}$$

となる。

※(2.18)式の導出について

運動エネルギーの項：

$$\int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{1}{2}m_1\left(\dot{\boldsymbol{r}}_1'^2-\dot{\boldsymbol{r}}_1^2\right)+\frac{1}{2}m_2\left(\dot{\boldsymbol{r}}_2'^2-\dot{\boldsymbol{r}}_2^2\right)\right]\mathrm{dt}$$
$$=\int_{t_0}^{t_1}[m_1\ddot{\boldsymbol{r}}_1\cdot\delta\boldsymbol{r_1}+m_2\ddot{\boldsymbol{r}}_2\cdot\delta\boldsymbol{r_2}]\,dt \tag{2.19}$$

$\dot{\boldsymbol{r}}_1'=\dot{\boldsymbol{r}}_1+\delta\dot{\boldsymbol{r}}_1$, $\dot{\boldsymbol{r}}_2'=\dot{\boldsymbol{r}}_2+\delta\dot{\boldsymbol{r}}_2$ を考慮するば第 1 項、第 2 項を別々に(2.3)～(2.5)式と全く同じ方法で、導出できる。

ポテンシャルの項：

$$\int_{t_0}^{t_1}[\{U(|\boldsymbol{r_1'}-\boldsymbol{r_2'}|)-U(|\boldsymbol{r_1}-\boldsymbol{r_2}|)\}]\,dt=\int_{t_0}^{t_1}[\boldsymbol{\nabla_1}U\cdot\delta\boldsymbol{r_1}+\boldsymbol{\nabla_2}U\cdot\delta\boldsymbol{r_2}]\,dt \tag{2.20}$$

の導出は、まず、 $U(|\boldsymbol{r_1'}-\boldsymbol{r_2'}|)$ は $U(\boldsymbol{r_1'},\boldsymbol{r_2'})$ かけるので、これに 2 変数のテイラー展開行うと、

$$U(\boldsymbol{r_1'},\boldsymbol{r_2'})=\mathrm{U}(\boldsymbol{r_1},\boldsymbol{r_2})+\frac{\partial\mathrm{U}}{\partial\boldsymbol{r_1}}\cdot\delta\boldsymbol{r_1}+\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{r_2}}\cdot\delta\boldsymbol{r_2}+\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2U}{\partial\boldsymbol{r_1^2}}\cdot\delta\boldsymbol{r_1}+\frac{\partial^2U}{\partial\boldsymbol{r_2^2}}\cdot\delta\boldsymbol{r_2}\right]+\cdots \tag{2.21}$$

となり、2 次以上の微小量を無視すれば、

$$U(|\boldsymbol{r_1'}-\boldsymbol{r_2'}|)-U(|\boldsymbol{r_1}-\boldsymbol{r_2}|)=\boldsymbol{\nabla_1}U\cdot\delta\boldsymbol{r_1}+\boldsymbol{\nabla_2}U\cdot\delta\boldsymbol{r_2} \tag{2.22}$$

話を元に戻して(2.18)式

$$\int_{t_0}^{t_1}[m_1\dot{\boldsymbol{r}}_1\cdot\delta\dot{\boldsymbol{r}}_1+m_2\dot{\boldsymbol{r}}_2\cdot\delta\dot{\boldsymbol{r}}_2+\boldsymbol{\nabla}_1U\cdot\delta\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{\nabla}_2U\cdot\delta\boldsymbol{r}_2]\,dt \tag{2.23}$$

は $\delta\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\frac{d}{dt}(\delta\boldsymbol{r})$であるから、第 1、2 項を部分積分して、

$$\begin{aligned}&=-\int_{t_0}^{t_1}[(m_1\ddot{\boldsymbol{r}}_1+\boldsymbol{\nabla}_1U)\cdot\delta\boldsymbol{r}_1+(m_2\ddot{\boldsymbol{r}}_2+\boldsymbol{\nabla}_2U)\cdot\delta\boldsymbol{r}_2]dt\\&+[m_1(\dot{\boldsymbol{r}}_{1B}\cdot\delta\boldsymbol{r}_{1B}-\dot{\boldsymbol{r}}_{1A}\cdot\delta\boldsymbol{r}_{1A})+m_2(\dot{\boldsymbol{r}}_{2B}\cdot\delta\boldsymbol{r}_{2B}-\dot{\boldsymbol{r}}_{2A}\cdot\delta\boldsymbol{r}_{2A})]\end{aligned} \tag{2.24}$$

となる。道筋C_1, C_2 に沿った運動は、ハミルトンの原理に従うのであるから、ニュートンの運動方程式に従うはずである。よって、この第 1 項の積分は 0 となる。したがって、ΔI は

$$\begin{aligned}\Delta I=&\left[\frac{1}{2}m_1\dot{\boldsymbol{r}}_{1B}^2+\frac{1}{2}m_2\dot{\boldsymbol{r}}_{2B}^2-U(|\boldsymbol{r}_{1B}-\boldsymbol{r}_{2B}|)\right]\Delta t\\&-\left[\frac{1}{2}m_1\dot{\boldsymbol{r}}_{1A}^2+\frac{1}{2}m_2\dot{\boldsymbol{r}}_{2A}^2-U(|\boldsymbol{r}_{1A}-\boldsymbol{r}_{2A}|)\right]\Delta t\\&+[(m_1\dot{\boldsymbol{r}}_{1B}\cdot\delta\boldsymbol{r}_{1B}+m_2\dot{\boldsymbol{r}}_{2B}\cdot\delta\boldsymbol{r}_{2B})-(m_1\dot{\boldsymbol{r}}_{1A}\cdot\delta\boldsymbol{r}_{1A}+m_2\dot{\boldsymbol{r}}_{2A}\cdot\delta\boldsymbol{r}_{2A})]\end{aligned} \tag{2.25}$$

となる。

ここで、図 5（b）より

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{r}&=\boldsymbol{r}'_{1A}-\boldsymbol{r}_{1A}=\delta\boldsymbol{r}_{1A}+\dot{\boldsymbol{r}}_{1A}\Delta t\\\Delta\boldsymbol{r}&=\boldsymbol{r}'_{2A}-\boldsymbol{r}_{1A}=\delta\boldsymbol{r}_{2A}+\dot{\boldsymbol{r}}_{2A}\Delta t\\\Delta\boldsymbol{r}&=\boldsymbol{r}'_{1B}-\boldsymbol{r}_{1B}=\delta\boldsymbol{r}_{1B}+\dot{\boldsymbol{r}}_{1B}\Delta t\\\Delta\boldsymbol{r}&=\boldsymbol{r}'_{2B}-\boldsymbol{r}_{2B}=\delta\boldsymbol{r}_{2B}+\dot{\boldsymbol{r}}_{2B}\Delta t\end{aligned} \tag{2.26}$$

とおけるから、ΔI の第 3 項に代入して

$$\begin{aligned}\Delta I=&\left[\frac{1}{2}m_1\dot{\boldsymbol{r}}_{1B}^2+\frac{1}{2}m_2\dot{\boldsymbol{r}}_{2B}^2-U(|\boldsymbol{r}_{1B}-\boldsymbol{r}_{2B}|)\right]\Delta t-\left[\frac{1}{2}m_1\dot{\boldsymbol{r}}_{1A}^2+\frac{1}{2}m_2\dot{\boldsymbol{r}}_{2A}^2-U(|\boldsymbol{r}_{1A}-\boldsymbol{r}_{2A}|)\right]\Delta t\\&+m_1\dot{\boldsymbol{r}}_{1B}\cdot(\Delta\boldsymbol{r}-\dot{\boldsymbol{r}}_{1B}\Delta t)+m_2\dot{\boldsymbol{r}}_{2B}\cdot(\Delta\boldsymbol{r}-\dot{\boldsymbol{r}}_{2B}\Delta t)\\&-m_1\dot{\boldsymbol{r}}_{1A}\cdot(\Delta\boldsymbol{r}-\dot{\boldsymbol{r}}_{1A}\Delta t)-m_2\dot{\boldsymbol{r}}_{2A}\cdot(\Delta\boldsymbol{r}-\dot{\boldsymbol{r}}_{2A}\Delta t)\\=&\left\{\left[\frac{1}{2}m_1\dot{\boldsymbol{r}}_{1A}^2+\frac{1}{2}m_2\dot{\boldsymbol{r}}_{2A}^2+U(|\boldsymbol{r}_{1A}-\boldsymbol{r}_{2A}|)\right]-\left[\frac{1}{2}m_1\dot{\boldsymbol{r}}_{1B}^2+\frac{1}{2}m_2\dot{\boldsymbol{r}}_{2B}^2+U(|\boldsymbol{r}_{1B}-\boldsymbol{r}_{2B}|)\right]\right\}\Delta t\\&-[(m_1\dot{\boldsymbol{r}}_{1A}+m_2\dot{\boldsymbol{r}}_{2A})-(m_1\dot{\boldsymbol{r}}_{1B}+m_2\dot{\boldsymbol{r}}_{2B})]\cdot\Delta\boldsymbol{r}=0\end{aligned} \tag{2.27}$$

したがって、ΔI が 0 になるためには、Δt , $\Delta\boldsymbol{r}$ は任意であるから、

$$m_1\dot{\boldsymbol{r}}_{1A}+m_2\dot{\boldsymbol{r}}_{2A}=m_1\dot{\boldsymbol{r}}_{1B}+m_2\dot{\boldsymbol{r}}_{2B} \tag{2.28}$$

$$\frac{1}{2}m_1\dot{\boldsymbol{r}}_{1A}^2+\frac{1}{2}m_2\dot{\boldsymbol{r}}_{2A}^2+U(|\boldsymbol{r}_{1A}-\boldsymbol{r}_{2A}|)=\frac{1}{2}m_1\dot{\boldsymbol{r}}_{1B}^2+\frac{1}{2}m_2\dot{\boldsymbol{r}}_{2B}^2+U(|\boldsymbol{r}_{1B}-\boldsymbol{r}_{2B}|) \tag{2.29}$$

が成り立たなければならない。すなわち、

$$\begin{cases}\textbf{空間の均質性}\text{から}\textbf{運動量保存の法則}\\\textbf{時間の一様性}\text{から}\textbf{エネルギー保存の法則}\end{cases}$$

が導かれるのである！！

(3) 空間の等方性と角運動量保存の法則

点 $\boldsymbol{r_{1A}}, \boldsymbol{r_{2A}}$ から点 $\boldsymbol{r_{1B}}, \boldsymbol{r_{2B}}$ に至る運動と、これらの 4 点を、ともに原点のまわりに角 $\boldsymbol{\Delta\varphi}$ だけ回転させたところにある 2 点どうしを結ぶ運動を考え、これらの運動は同じ条件の下で行われるとする。

空間は等方的であるとすれば、これらの道筋に沿った作用積分の値は等しくなければならない。

図 7 の(a)より、$\boldsymbol{\Delta r}$ は次の式が成り立つ、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Delta r_{1A}} &= \boldsymbol{r'_{1A}} - \boldsymbol{r_{1A}} = [\boldsymbol{\Delta\varphi} \times \boldsymbol{r_{1A}}] \\ \boldsymbol{\Delta r_{2A}} &= \boldsymbol{r'_{2A}} - \boldsymbol{r_{1A}} = [\boldsymbol{\Delta\varphi} \times \boldsymbol{r_{2A}}] \\ \boldsymbol{\Delta r_{1B}} &= \boldsymbol{r'_{1B}} - \boldsymbol{r_{1B}} = [\boldsymbol{\Delta\varphi} \times \boldsymbol{r_{1B}}] \\ \boldsymbol{\Delta r_{2B}} &= \boldsymbol{r'_{2B}} - \boldsymbol{r_{2B}} = [\boldsymbol{\Delta\varphi} \times \boldsymbol{r_{2B}}]\end{aligned} \tag{2.30}$$

また、簡単のために、$\Delta t = 0$ とすれば、(2.26)式より

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Delta r_{1A}} &= \delta\boldsymbol{r_{1A}} \\ \boldsymbol{\Delta r_{2A}} &= \delta\boldsymbol{r_{1A}} \\ \boldsymbol{\Delta r_{1B}} &= \delta\boldsymbol{r_{1B}} \\ \boldsymbol{\Delta r_{2B}} &= \delta\boldsymbol{r_{2B}}\end{aligned} \tag{2.31}$$

とおける。これらを(2.27)式に代入すれば

$$\begin{aligned}\Delta I = &\{m_1(\dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{1B}} \cdot [\boldsymbol{\Delta\varphi} \times \boldsymbol{r_{1B}}]) + m_2(\dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{2B}} \cdot [\boldsymbol{\Delta\varphi} \times \boldsymbol{r_{2B}}])\} \\ &-\{m_1(\dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{1A}} \cdot [\boldsymbol{\Delta\varphi} \times \boldsymbol{r_{1A}}]) + m_2(\dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{2A}} \cdot [\boldsymbol{\Delta\varphi} \times \boldsymbol{r_{2A}}])\} \\ = \boldsymbol{\Delta\varphi} \cdot \{&([\boldsymbol{r_{1B}} \times m_1\dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{1B}}] + [\boldsymbol{r_{2B}} \times m_2\dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{2B}}]) \\ &- ([\boldsymbol{r_{1A}} \times m_1\dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{1A}}] + [\boldsymbol{r_{2A}} \times m_2\dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{2A}}])\}\end{aligned} \tag{2.32}$$

ΔI が 0 になるためには、$\boldsymbol{\Delta\varphi}$ は任意であるから、

$$[\boldsymbol{r_{1A}} \times m_1\dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{1A}}] + [\boldsymbol{r_{2A}} \times m_2\dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{2A}}] = [\boldsymbol{r_{1B}} \times m_1\dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{1B}}] + [\boldsymbol{r_{2B}} \times m_2\dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{2B}}] \tag{2.33}$$

が成り立たなければならない。すなわち、**空間の等方性**から**角運動量保存の法則**が導かれるのである。

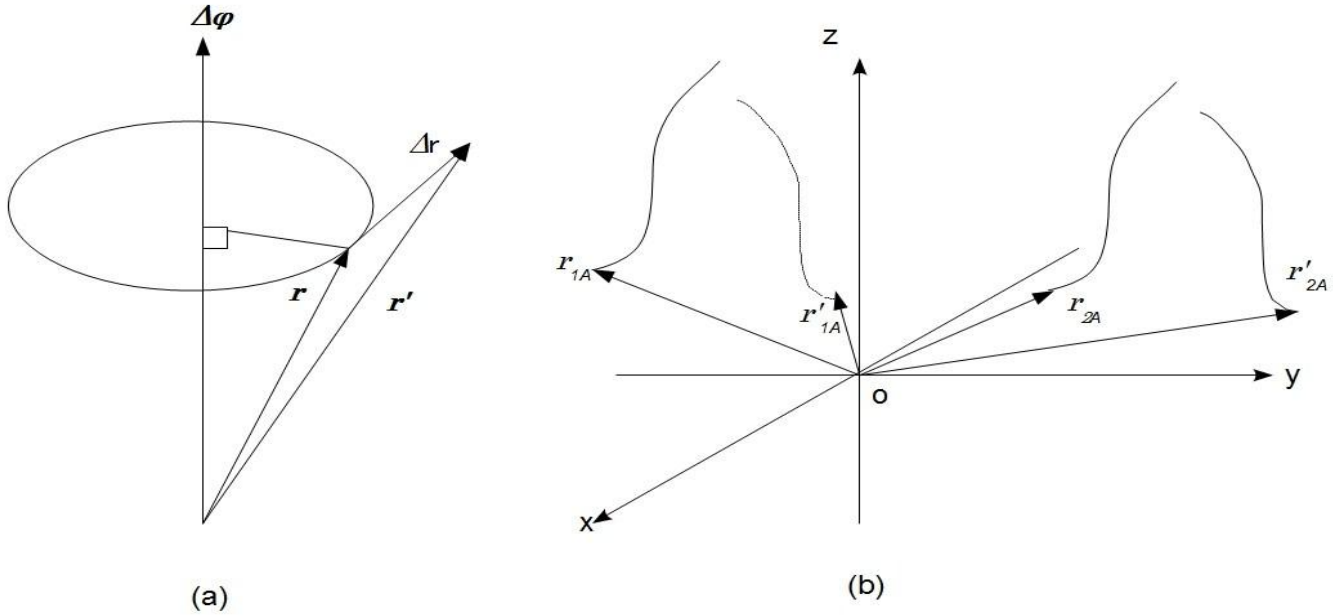


図 7 角運動量保存則

§3. 補足

- 保存力とポテンシャルについて

仕事は「力の大きさと力の方向への物体の変位の大きさとの積」と定義さる。

一般的には、力の大きさ、方向や物体の変位の方向は、場所によって変化するので、仕事 W は線積分、

$$W = \int_{\boldsymbol{r_1}\,C}^{\boldsymbol{r_2}} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} \tag{3.1}$$

として求められる。

力 $\boldsymbol{F}$ が物体の位置 $\boldsymbol{r}(x,y,z)$ に依存する場合には、

$$\begin{aligned} W &= \int_{\boldsymbol{r_1}}^{\boldsymbol{r_2}} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} \\ &= \int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} \left[F_x(x,y,z)dx + F_y(x,y,z)dy + F_z(x,y,z)dz\right] \end{aligned} \tag{3.2}$$

と表される。

ここで、特別な場合として力 $\boldsymbol{F}$ があるスカラー関数 $U(x,y,z)$ の勾配によって与えられるとき、力 $\boldsymbol{F}$ は、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F} &= -\mathrm{grad}\,U = -\boldsymbol{\nabla}U \\ &= -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\boldsymbol{e_x} + \frac{\partial U}{\partial y}\boldsymbol{e_y} + \frac{\partial U}{\partial z}\boldsymbol{e_z}\right) \end{aligned} \tag{3.3}$$

となる。(3.2)式より、この時の仕事 W は、

$$\begin{aligned} W &= \int_{\boldsymbol{r_1}}^{\boldsymbol{r_2}} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} \\ &= \int_{\boldsymbol{r_1}}^{\boldsymbol{r_2}} -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\boldsymbol{e_x} + \frac{\partial U}{\partial y}\boldsymbol{e_y} + \frac{\partial U}{\partial z}\boldsymbol{e_z}\right)\cdot\left(dx\boldsymbol{e_x} + dy\boldsymbol{e_y} + dz\boldsymbol{e_z}\right) \\ &= \int_{\boldsymbol{r_1}}^{\boldsymbol{r_2}} \left(\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz\right) \\ &= \int_{\boldsymbol{r_1}}^{\boldsymbol{r_2}} dU \\ &\therefore\ W = -[U(\boldsymbol{r_2}) - U(\boldsymbol{r_1})] \end{aligned} \tag{3.4}$$

となる。このときの仕事は物体の始めと終わりの位置だけに依存されていることが見て取れる。

このように力のなす仕事が、物体の始めと終わりの位置のみによって定まり、運動の経路に依存したとき、このような力を**保存力**、座標のスカラー関数 U を**ポテンシャル**と呼ぶ。

- テイラー展開について

関数 $f(x)$ に $x = x_0$ の周りのテイラー展開は、Δx を微小量（展開パラメータ）として、

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta x \frac{df(x)}{dx} + \frac{\Delta x^2}{2!}\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \cdots + \frac{\Delta x^n}{n!}\frac{d^n f(x)}{dx^n} + \cdots \quad (3.5).$$

で表される。

2 変数関数 $f(x, y)$ に関する $(x, y) = (x_0,\ y_0)$ の周りのテイラー展開の 2 次までの近似は、$\Delta x, \Delta y$ を微小量として、

$$f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + \Delta x \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} + \frac{1}{2!}\left[\Delta x^2 \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + 2\Delta x \Delta y \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} + \Delta y^2 \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}\right] + \cdots \quad (3.6).$$

で表せる。

参考図書

・高野義郎: "力学", 朝倉書店 (2004-3)

この資料のほぼすべてはこの参考書から抜き出したものである。初学者には行間を読むのが苦しいかもしれない。

・L.E.エスルゴルツ:“理工学海外名著シリーズ　科学者・技術者のための変分法”，ブレイン図書出版株式会社(1979-12)

変分学の参考書。

・L.E.エスルゴルツ:“理工学海外名著シリーズ　科学者・技術者のための変分法　学習指導書・練習問題解説付”，ブレイン図書出版株式会社(1976-12)

上の参考書のどっかの先生の講義ノート。