

電磁気学 [輪講]

立嶋聖太郎

2013 年 6 月 2 日

目次

第 IV 部	電位	3
1	静電界中での仕事	3
1.1	静電界中で点電荷を微小変位だけ移動させるために要する仕事	3
1.2	曲線に沿った仕事	3
1.3	閉曲線に沿った仕事	4
2	電位	4
2.1	電位差	4
2.2	電位	5
2.3	電位の基準	5
2.4	電位と電位差の関係	5
3	電位の重ね合わせ	6
3.1	点電荷の電位	6
3.2	電位の重ね合わせ	6
4	電位の勾配	7
4.1	電位と電界の関係	7
4.2	ポアソンの方程式	7

第 IV 部

電位

1 静電界中での仕事

電位には 3 つの面がある。

1. 静電界^{*1}中において 1[c] の単位電荷を移動させるのに要する仕事。
2. 1 つ 1 つの点電荷による電位の総和。
3. その勾配が電界に等しい。

まずは 1 つ目の面に着目して電位について議論していく。

1.1 静電界中で点電荷を微小変位だけ移動させるために要する仕事

静電界 $\mathbf{E}$ 中で点電荷 Q に作用する力は $\mathbf{F} = Q\mathbf{E}$ であるから、仕事の定義から電界に逆らって点電荷 Q を微小変位 $\Delta \mathbf{r}$ だけ移動させるに必要な仕事は

$$\begin{aligned}\Delta W &= -\mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r} \\ &= -Q\mathbf{E} \cdot \Delta \mathbf{r}\end{aligned}\tag{1}$$

と与えられる。このとき $\Delta W < 0$ ならば電界によって仕事をされたことになる。

1.2 曲線に沿った仕事

静電界 $\mathbf{E}$ 中で曲線 C に沿って点 B から点 A まで移動させるために必要な仕事は

$$\begin{aligned}W &= \int_B^A dW \\ &= \int_B^A (-Q\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}) \\ &= -Q \int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}\end{aligned}\tag{2}$$

と線積分の形で与えられる。

電界が静電界であるときの特徴の 1 つとして静電界 $\mathbf{E}$ 中では始点 B から終点 A までの仕事 W は経路によらないというものがある。すなわち、

$$-\int_{C_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\int_{C_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}\tag{3}$$

である^{*2}。

^{*1} 静電界とは時間によって大きさが変化しないような電界である。しばらくは電界が静電界であるときのための議論をする。

^{*2} 経路 C_1 と経路 C_2 はそれぞれ点 B と点 A を結ぶ経路である。

1.3 閉曲線に沿った仕事

曲線がある点から出発してその点に戻るとき、その曲線を閉曲線という。式 (3) を変形すれば

$$\int_{C_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} + \left(- \int_{C_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \right) = 0 \quad (4)$$

となり、ここで左辺について注目すると

$$\begin{aligned} \int_{C_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} + \left(- \int_{C_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \right) &= \int_{C_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} + \int_{-C_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_{C_1 + (-C_2)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \end{aligned} \quad (5)$$

となり*³、左辺は閉曲線に沿った仕事であることがわかる。これを元の式に代入すれば

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (6)$$

となり、閉曲線に沿った仕事は 0 になることがわかる。またストークスの定理から式 (6) は

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (7)$$

と表現することも可能である。

2 電位

2.1 電位差

電位差 V_{AB} を式 (2) の仕事 W を使って次のように定義する。

$$\begin{aligned} V_{AB} &= \frac{W}{Q} \\ &= - \int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \end{aligned} \quad (8)$$

式に電界 $\mathbf{E}$ が含まれていることから明らかなように電位差 V_{AB} を求めるときは先に電界 $\mathbf{E}$ の大きさを調べなければならない。

また、この定義は電界 $\mathbf{E}$ を力 $\mathbf{F}$ を使って

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{Q} \quad (9)$$

と定義することに相当する。電界 $\mathbf{E}$ の定義がそうであったように移動させる電荷 Q を単位電荷に置き換えたものが電位差である。この定義のおかげで電界 $\mathbf{E}$ と電位差 V_{AB} は移動させる電荷の電荷量によらない物理量になる。今は後の計算を簡単にするために移動させる電荷 Q を隠したが、電磁気現象を場の振舞いとして議論する際はこういった事情が今よりも重要になってくる。

*³ 経路 C_2 の反対向きの経路を $-\int_{C_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_{-C_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$ と定義した。

2.2 電位

電位差 V_{AB} は電界 $\mathbf{E}$ を変数に含んでいるがそれだけでなく始点 B と終点 A の 2 点の座標を変数として持っている。ここで始点 B を点 C に固定することを考える。点 C がどのような点であるべきかは後で議論するとして、とりあえず始点 B が固定できれば電位差 V_{AB} は変数として電界 $\mathbf{E}$ と 1 点の座標だけを持つ簡単な関数になる。このような電位差 V_{AB} を単に電位 V_A という。

$$V_{AB} = - \int_{B(\mathbf{r}')}^{A(\mathbf{r})} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = V_{AB}(\mathbf{E}, \mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (10)$$

$$V_A = - \int_C^{A(\mathbf{r})} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = V_A(\mathbf{E}, \mathbf{r}) \quad (11)$$

ここで $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$ はそれぞれ終点 A 、始点 B の座標である。電位差 V_{AB} が相対的な物理量であるのに対して電位 V_A は 1 つ座標を与えれば決まるような絶対的な物理量である。

2.3 電位の基準

点 C の電位を 0 としよう。これは始点 B を点 C に固定することと同じ意味である^{*4}。このとき電位 0 とした点 C 、または点 C を含んだ等電位な集合のことを電位の基準という。以下に電位の基準とすべき点や集合の候補をいくつか挙げる。

- 接地 地球表面の地面を電位が 0 となる曲面とみなす。
- 無限遠点 例えば点電荷が周りに作る電位を解くならば無限遠点^{*5}を電位が 0 となる点とみなす。
- 指定された点や曲線、曲面 例えば同心円筒導体であれば外導体を電位が 0 となる曲面とみなす。

2.4 電位と電位差の関係

点 C を電位の基準とするとき電位差 V_{AB} は

$$\begin{aligned} V_{AB} &= - \int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \\ &= - \int_B^C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} - \int_C^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \left(- \int_C^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \right) - \left(- \int_C^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \right) \\ &= V_A - V_B \end{aligned} \quad (12)$$

と変形できて、やはり電位差 V_{AB} は 2 点における電位の差 $V_A - V_B$ に相当することがわかる。

3 電位の重ね合わせ

電位 V を求める際はいちいち電界 $\mathbf{E}$ を調べる必要があるのかと思いきや電位 V に関する重ね合わせの原理を駆使するとわざわざ電界 $\mathbf{E}$ を調べることなく楽に計算できる場合がある。

^{*4} $B = C \iff - \int_B^C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0$

^{*5} 原点からの距離が無限長であるような点のこと。

3.1 点電荷の電位

点 $\mathbf{r}'$ に位置する点電荷 Q による点 $\mathbf{r}$ における電界 $\mathbf{E}$ は

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}\mathbf{a}_r \quad (13)$$

であるから無限遠点を電位の基準にとれば電位 V は

$$\begin{aligned} V &= - \int_{\infty}^{\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \\ &= - \int_{\infty}^{\mathbf{r}} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \mathbf{a}_r \cdot d\mathbf{r} \\ &= - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{dr}{r^2} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} \right]_{\infty}^r \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \end{aligned} \quad (14)$$

となる。途中 $r = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ と置き換えており、無限遠点は電位の基準であるから $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \Big|_{r=\infty} = 0$ とした。

3.2 電位の重ね合わせ

電位の重ね合わせの原理^{*6}とは次の式が成り立つことをいう。

$$V = \sum_{i=1}^n V_i \quad (15)$$

点 $\mathbf{r}_i (i = 1, 2, \dots, n)$ の位置に点電荷 Q_i が存在するとき、これらの複数個の点電荷による電位は

$$\begin{aligned} V &= \sum_{i=1}^n V_i \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} \end{aligned} \quad (16)$$

と与えられる。これを利用すればいちいち電界 $\mathbf{E}$ を調べることなく直接に電位 V を得られる。

また電荷が連続的に分布する場合は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} V &= \int dV \\ &= \int \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \end{aligned} \quad (17)$$

^{*6} 一般に物理量の和を線形結合で示せることをその物理量の重ね合わせの原理という。

4 電位の勾配

4.1 電位と電界の関係

スカラー場 f の勾配を

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{a}_z \quad (18)$$

と定義する。スカラー場 f の勾配はベクトルである。これを用いて電位 V と電界 $\mathbf{E}$ は次のように結ばれる。

$$\mathbf{E} = -\nabla V \quad (19)$$

この式の意味するところは電界 $\mathbf{E}$ は電位の勾配 ∇V に -1 をかけたものとして与えられるということである。

今までは既知の電界 $\mathbf{E}$ から電位 V を求めることが多かったが、この関係式を使えば逆に既知の電位 V から電界 $\mathbf{E}$ を導くことが可能だ。電位 V はスカラーであるからベクトルである電界 $\mathbf{E}$ より計算がしやすいため電界 $\mathbf{E}$ と電位 V をいつでも変換ができるというメリットは大きい。

4.2 ポアソンの方程式

スカラー場 f の勾配の発散を

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f \quad (20)$$

と表現することとしてこれをスカラー場 f のラプラシアンという。スカラー場 f のラプラシアンはベクトルでなくスカラーである。また座標系に直交座標系を選べば演算子としての形は

$$\nabla \cdot \nabla f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (21)$$

と表される。ところで式 (19) を微分形のガウスの法則 ($\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$) に代入してみると次のような方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \nabla \cdot (-\nabla V) \\ &= -\nabla \cdot \nabla V \\ &= -\nabla^2 V \\ &= \frac{\rho}{\epsilon} \end{aligned} \quad (22)$$

すなわち

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (23)$$

このような方程式をポアソンの方程式という。この方程式はガウスの法則と同等なものであるから理論上この方程式から電位を直接解くことは可能であるがこのような偏微分方程式を解く際は一般に電位 V の境界条件や接続条件を十分に課さなければならない。

参考文献

- [1] 石井望、『要点がわかる 電磁気学』、コロナ社