

1.9.4 2 階のオイラー法

運動方程式は 2 階の微分方程式ですが、オイラー法では 1 階の微分方程式しか解けません。そこで 1 階の連立微分方程式に帰着させて解くことにします。

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = f(x(t), t) \quad (1.20)$$

上の 2 階微分方程式は次のように一階連立微分方程式と同等と考えることができます。

$$\frac{dx(t)}{dt} = g(x(t), t) \quad (1.21)$$

$$\frac{dg(x(t), t)}{dt} = f(x(t), t) \quad (1.22)$$

ここでは自由落下，斜方投射，単振動，単振り子といった基本的な運動方程式を例にとって解説して行きます。

自由落下

重力加速度を g とすると， $x - y$ 座標系での自由落下の運動方程式は次の式のようになります。

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = -g \quad (1.23)$$

これを

$$\frac{dy(t)}{dt} = v_y(t) \quad (1.24)$$

$$\frac{dv_y(t)}{dt} = -g \quad (1.25)$$

とすると 1 階の連立微分方程式となります。

例題 24 2 階のオイラー法 自由落下

example-24.c

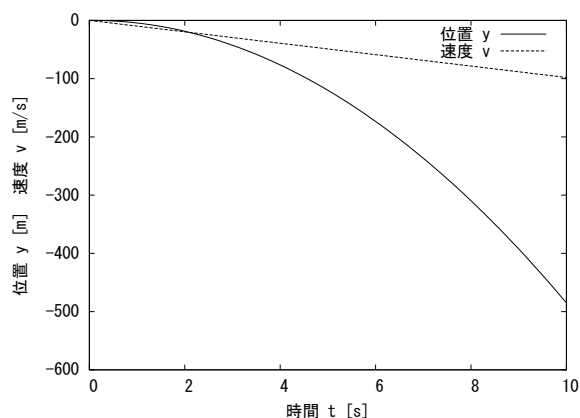
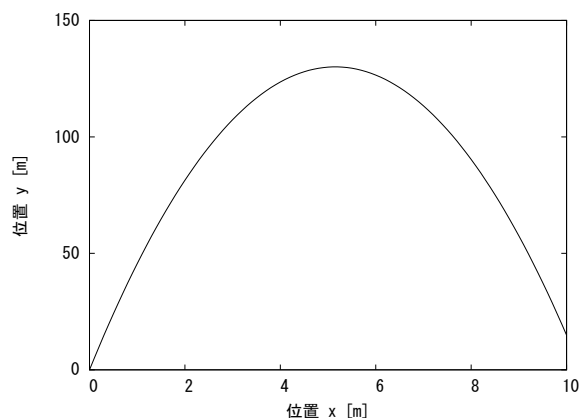
```
#include <stdio.h>

int main(void)
{
    double t, y, vy;
    double h, t_last;

    h = 0.1;
    t_last = 10.0;

    /* 初期値 */
    t = 0.0;
    y = 0.0;
    vy = 0.0;

    while (t < t_last) {
        printf("%f\t%f\t%f\n", t, y, vy);
        y = y + h * (vy); /* 位置 ← ∫ 速度 */
        vy = vy + h * (-9.8); /* 速度 ← ∫ 加速度 */
        t = t + h;
    }
    return 0;
}
```

図 1.5 自由落下の $t-y$, $t-v$ グラフ図 1.6 斜方投射の $x-y$ グラフ

#define プリプロセッサディレクティブ

オイラー法と直接は関係ありませんが、プログラムの先頭付近に

```
#define マクロ名 文字列
```

と記述するとコンパイル時にプログラム中に出てくる全てのマクロ名が文字列に置換されます。例えば `#define g 9.8` のようにすると、プログラム中で使用されている `g` は `9.8` と置換されます。`#define` はセミコロンで終了しないことに注意してください。物理定数のような不変な値を `#define` で置換させることにより、自作関数を含めたプログラム全体で定数を共有することができます。なお、乱用すると関数の独立性を弱めてしまうので注意しましょう。また、変数と区別するためマクロ名は大文字で宣言すると良いでしょう。

次の例は自由落下のプログラムの重力加速度を `#define g 9.8` とし、さらにオイラー法の関数部分を自作関数に追い出し少しだけ汎用的にしたものです。

例題 25 2 階のオイラー法 自由落下その 2

example-25.c

```

#include <stdio.h>
#define G 9.8

double f(double v);
double g(double a);

int main(void)
{
    double t, y, vy;
    double h, t_last;

    h = 0.1;
    t_last = 10.0;

    /* 初期値 */
    t = 0.0;
    y = 0.0;
    vy = 0.0;

    while (t < t_last) {
        printf("%f\t%f\t%f\n", t, y, vy);
        y = y + h * g(vy); /* 位置 ← ∫速度 */
        vy = vy + h * f(-G); /* 速度 ← ∫加速度 */
        t = t + h;
    }
    return 0;
}

double f(double a)
{
    return a;
}

double g(double v)
{
    return v;
}

```

この例では関数部分を自作関数化するメリットはあまりありませんが，こういう表現に慣れておくと今後もっと複雑なアルゴリズムを使用する場合に応用が効きます．

斜方投射

自由落下では 1 次元の運動でしたが，斜方投射では 2 次元の運動になります． x 成分の運動方程式に加え x 成分の運動方程式を考えます． x 方向には加速度が働かないので

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = 0 \quad (1.26)$$

となります．これを 1 階連立微分方程式にし，成分ごとにそれぞれ解きます．

$$\frac{dx(t)}{dt} = v_x(t) \quad (1.27)$$

$$\frac{dv_x}{dt} = 0 \quad (1.28)$$

例題 26 2 階のオイラー法 斜方投射

example-26.c

```

#include <stdio.h>
#define G 9.8

double f(double a);
double g(double v);

int main(void)
{
    double t, x, y, vx, vy;
    double h, t_last;

    h = 0.1;
    t_last = 10.0;

    /* 初期値 */
    t = 0.0;
    x = 0.0;
    y = 0.0;
    vx = 1.0;
    vy = 50.0;

    while (t < t_last) {
        printf("%f\t%f\t%f\n", t, x, y);

        /* x 成分についてオイラー法 */
        x = x + h * g(vx);
        vx = vx + h * f(0);

        /* y 成分についてオイラー法 */
        y = y + h * g(vy);
        vy = vy + h * f(-G);

        t = t + h;
    }
    return 0;
}

double f(double a)
{
    return a;
}

double g(double v)
{
    return v;
}

```

単振動

k をばね定数とおくと単振動の運動方程式は

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -kx(t) \quad (1.29)$$

となります．今までの例と同様に簡単に 1 階の連立微分方程式に置き換えて解くことができます．試しに各自で解いてみてください．

単振り子

一般化座標を θ にとった単振り子の運動方程式は，系の長さを l ，重力加速度を g とおくと

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \theta(t) \quad (1.30)$$

となります．この章の冒頭でも述べましたが，単振り子の運動方程式は 2 階非線形微分方程式であるため解析解は容易に求めることができませんが，オイラー法などの手法を使うと簡単に数値解を求めることができます．

一階の連立微分方程式にすると次のようになります．

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = v_\theta(t) \quad (1.31)$$

$$\frac{dv_\theta(t)}{dt} = -\frac{g}{l} \sin \theta(t) \quad (1.32)$$

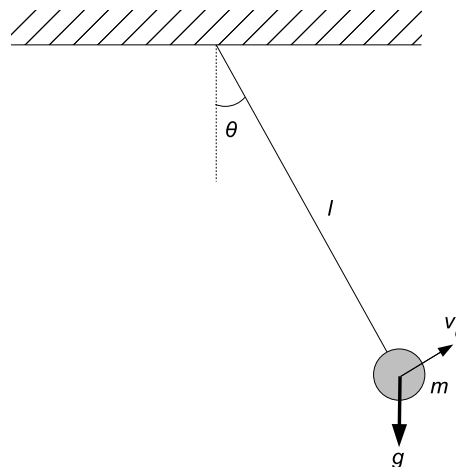


図 1.7 単振り子

例題 27 2 階のオイラー法 単振り子

example-27.c

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#define G 9.8
#define L 1.0

/* θを求める運動方程式内の関数 */
double f(double theta);
double g(double vtheta);

/* θからx y 座標を求める*/
double x(double theta);
double y(double vtheta);

int main(void)
{
    double t, theta, vtheta;
    double h, t_last;

    h = 0.1;
    t_last = 10.0;

    /* 初期値 */
    t = 0.0;
    theta = 1.0;
    vtheta = 0.0;

    while (t < t_last) {
        printf("%f\t%f\t%f\t%f\t%f\t%f\n", t, theta, vtheta, x(theta), y(theta));

        theta = theta + h * g(vtheta); /* θ ← ∫ g(v θ)dt */
        vtheta = vtheta + h * f(theta); /* v θ ← ∫ f(θ)dt */
    }
}
```

```

        t = t + h;
    }
    return 0;
}

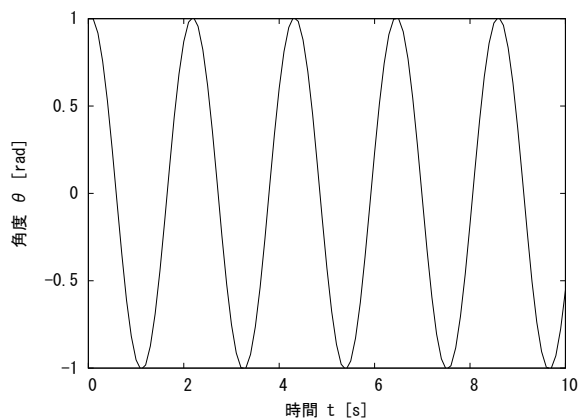
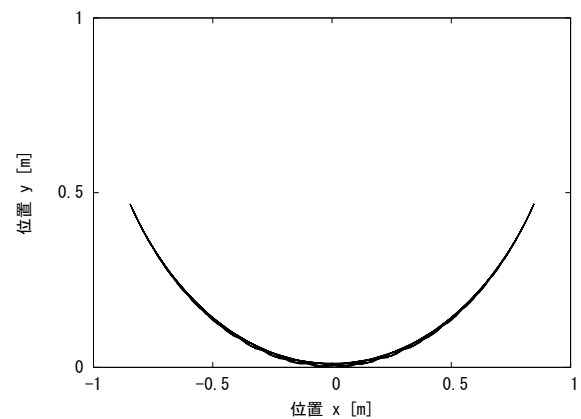
/*  $\theta$  を求める運動方程式内の関数 */
double f(double theta)
{
    return -G / L * sin(theta);
}

double g(double vtheta)
{
    return vtheta;
}

/*  $\theta$  から  $x$   $y$  座標を求める*/
double x(double theta)
{
    return L * sin(theta);
}

double y(double theta)
{
    return L - L * cos(theta);
}

```

図 1.8 単振り子の $t - \theta$ グラフ図 1.9 単振り子の $x - y$ グラフ

1.9.5 課題

課題 22 単振動の運動方程式をオイラー法で解いてみよう。

課題 23 空気抵抗がある場合の自由落下の運動方程式を立て、オイラー法で解いてみよう。十分時間が経つと速度が一定になることを確かめる。